



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES

CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

**ABORDAGEM DA UTILIZAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR EM  
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS IMPLEMENTADAS NA  
VISÃO COMPUTACIONAL**

Gabriel Kist

Lajeado/RS, novembro de 2020

Gabriel Kist

**ABORDAGEM DA UTILIZAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR EM  
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS IMPLEMENTADAS NA  
VISÃO COMPUTACIONAL**

Projeto de Monografia apresentado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso I do curso de Engenharia da Computação, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como parte da exigência para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia da Computação.

Orientador: Prof. Me. Luis Antônio Schneiders

.

Lajeado/RS, dezembro de 2020

*“A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo”*

*Galileu Galilei*

## RESUMO

Na atualidade, torna-se evidente o crescimento de projetos da área da visão computacional e inteligência artificial, com várias possibilidades de aplicações comerciais e acadêmicas. Junto com este crescimento, surge a necessidade de uma maior compreensão por parte dos programadores e pesquisadores, a fim de garantir um maior entendimento sobre as tecnologias utilizadas. As bibliotecas de Visão Computacional possibilitam a utilização de seus códigos sem a necessidade do programador entender a matemática envolvida na lógica implementada, focando apenas no resultado e nas camadas mais altas da abstração e do entendimento. Através do estudo da Matemática, com ênfase na Álgebra Linear e com a utilização de suas tecnologias, torna-se possível exemplificar os processos de implementação de Transformações Geométricas utilizadas em bibliotecas de Visão Computacional. Esta pesquisa de caráter exploratório se dá através de pesquisas bibliográficas em artigos, livros, teses, revistas e vídeos. A pesquisa tem como objetivo criar a relação entre a utilização da Álgebra Linear e Transformações Geométricas implementadas em bibliotecas de Visão Computacional. No presente trabalho é demonstrada a relação dos conteúdos da Álgebra Linear e da Geometria através de um demonstrativo que relaciona os conteúdos pesquisados em duas linhas de raciocínio, sendo a primeira à aplicação dos conceitos matemáticos na plataforma GeoGebra, e a segunda através de conceitos de programação e aplicabilidade na biblioteca OpenCV, demonstrando assim a relevância e correlação dos conteúdos apresentados na pesquisa. Com base nos demonstrativos e na pesquisa exploratória, foi possível validar os objetivos do presente trabalho, demonstrando a importância de conteúdos da Álgebra Linear como: vetores, matrizes, sistemas lineares e noções de espaço. Com base nas constatações encontradas, é possível concluir que a Álgebra Linear está presente na implementação de bibliotecas de Visão Computacional.

**Palavras-chave:** Matemática, Álgebra, Transformações Geométricas, Visão Computacional.

## ABSTRACT

At the present time, the increase of projects in the field of computer vision and artificial intelligence is evident, with several possibilities for commercial and academic applications. Along with this increase, there is a need for greater understanding on the part of programmers and researchers, in order to ensure a greater understanding of the technologies used. Computer Vision libraries make it possible to use their codes without the need for the programmer to understand the mathematics involved in the implemented logic, focusing only on the result and the higher layers of abstraction and understanding. Through the study of Mathematics, with an emphasis on Linear Algebra and the use of its technologies, it becomes possible to exemplify the implementation processes of Geometric Transformations used in Computer Vision libraries. This exploratory research takes place through bibliographic research in articles, books, theses, magazines and videos. The research aims to create the relationship between the use of Linear Algebra and Geometric Transformations implemented in Computer Vision libraries. This work demonstrates the relationship between the contents of Linear Algebra and Geometry through a statement that relates the researched content in two lines of reasoning, the first being the application of mathematical concepts on the GeoGebra platform, and the second through programming concepts and applicability in the OpenCV library, thus demonstrating the relevance and correlation of the content presented in the research. Based on the statements and exploratory research was to validate the objectives of this work, demonstrating the importance of content as Linear Algebra: vectors, matrices, linear systems and notions of space. Based on the findings found, it is possible to conclude that Linear Algebra is present in the implementation of Computer Vision libraries.

**Keywords:** Mathematics. Algebra. Geometric Transformations. Computer Vision.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

### LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação de um vetor .....	15
Figura 2 - Vetores equivalentes .....	16
Figura 3 - Sistema de coordenadas retangulares .....	16
Figura 4 - Ponto em um sistema de coordenadas .....	17
Figura 5 - Par ordenado.....	17
Figura 6 - Soma de vetores.....	18
Figura 7 - Representação de uma matriz $A, m \times n$ .....	19
Figura 8 - Elementos de uma matriz.....	19
Figura 9 - Diagonal principal e secundária .....	19
Figura 10 - Matriz A e B.....	20
Figura 11 - Multiplicação da matriz A pela matriz B .....	21
Figura 12 - Exemplos da transformação de escala .....	22
Figura 13 - Equação da transformação de escala.....	23
Figura 14 - Matriz da transformação de escala.....	23
Figura 15 - Exemplo da transformação de rotação .....	23
Figura 16 - Equação da transformação de rotação.....	24
Figura 17 - Matriz da transformação de rotação.....	24
Figura 18 - Exemplo da transformação de reflexão.....	24
Figura 19 - Matrizes da transformação de reflexão .....	25
Figura 20 - Exemplo da transformação de cisalhamento .....	25
Figura 21 - Matrizes da transformação de cisalhamento .....	26
Figura 22 - Matriz da transformação de translação .....	26
Figura 23 - Deslocamento de um objeto .....	27
Figura 24 - Matriz original com a adição de uma coordenada homogênea .....	27
Figura 25 - Reescrita da translação usando coordenadas homogêneas.....	28
Figura 26 - Passo a passo da rotação em um ponto específico.....	28
Figura 27 - Sistema de coordenadas em um dispositivo .....	31
Figura 28 - Conjunto do cubo RGB.....	32
Figura 29 - Cubo de cores RGB .....	32
Figura 30 - Matriz de transformação de escala ( <i>OpenCV</i> ).....	37
Figura 31 - Matriz de transformação de translação ( <i>OpenCV</i> ) .....	38

Figura 32 - Matriz de transformação de rotação(OpenCV) .....	38
Figura 33 - Tipos de cisalhamento.....	39
Figura 34 - Matriz de transformação de cisalhamento (OpenCV) .....	39
Figura 35 - Matrizes de reflexão (OpenCV) .....	40
Figura 36 - Pontos iniciais.....	51
Figura 37 - Polígono e suas representações.....	51
Figura 38 - Transformação de escala e representação gráfica.....	52
Figura 39 - Transformação de rotação e representação gráfica.....	53
Figura 40 - Transformação de reflexão e representação gráfica .....	54
Figura 41 - Transformação de cisalhamento e representação gráfica.....	55
Figura 42 - Transformação de translação e representação gráfica .....	56
Figura 43 - Transformação de translação com multiplicação de matriz e representação gráfica .....	56
Figura 44 - Transformação de rotação em um ponto específico e representação gráfica .....	58
Figura 45 - Imagem utilizada nas transformações .....	59
Figura 46 - Código da transformação de escala e representação da imagem de saída .....	59
Figura 47 - Código da transformação de rotação e representação da imagem de saída .....	60
Figura 48 - Aplicação da matriz de rotação OpenCV no GeoGebra .....	61
Figura 49 - Código da transformação de reflexão e representação da imagem de saída .....	62
Figura 50 - Código da transformação de cisalhamento e representação da imagem de saída ..	62
Figura 51 - Código da transformação de translação e representação da imagem de saída .....	63

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1 Tema .....</b>	<b>10</b>
<b>1.1.1 Delimitação do tema.....</b>	<b>10</b>
<b>1.2 Questão da pesquisa.....</b>	<b>10</b>
<b>1.3 Hipótese .....</b>	<b>10</b>
<b>1.4 Objetivos.....</b>	<b>10</b>
<b>1.4.1 Objetivo geral.....</b>	<b>11</b>
<b>1.4.2 Objetivos específicos.....</b>	<b>11</b>
<b>1.5 Justificativa .....</b>	<b>11</b>
<b>1.6 Estrutura do trabalho .....</b>	<b>11</b>
<b>2 REVISÃO DA TEÓRICA .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1 O que é Álgebra?.....</b>	<b>13</b>
<b>2.1.1 História da Álgebra.....</b>	<b>13</b>
<b>2.2 Conteúdos e conceitos da Álgebra Linear .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2.1 Vetores e sistemas de coordenadas .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2.2 Vetores no plano.....</b>	<b>17</b>
<b>2.2.3 Operações com vetores.....</b>	<b>18</b>
<b>2.2.4 Matrizes .....</b>	<b>18</b>
<b>2.2.5 Tipos de matrizes.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2.6 Operações com matrizes.....</b>	<b>20</b>
<b>2.3 Transformações geométricas lineares e afins.....</b>	<b>21</b>
<b>2.3.1 Transformações lineares .....</b>	<b>21</b>
<b>2.3.2 Transformações afins .....</b>	<b>21</b>
<b>2.3.2.1 Transformação de escala.....</b>	<b>22</b>
<b>2.3.2.2 Transformação de rotação .....</b>	<b>23</b>
<b>2.3.2.3 Transformação de reflexão .....</b>	<b>24</b>



2.3.2.4 Transformação de cisalhamento .....	25
2.3.2.5 Transformação de translação .....	26
2.3.3 Coordenadas homogêneas.....	27
2.3.4 Combinação de Transformações .....	28
2.4 Uma visão matemática sobre a evolução da computação .....	29
2.5 Aplicação da álgebra na computação .....	30
2.5.1 Sistema de coordenadas do dispositivo.....	30
2.5.2 Combinações Lineares e aplicação de modelo de cores .....	31
2.6 Visão computacional .....	32
2.6.1 O que é visão computacional?.....	32
2.6.2 História da visão computacional.....	33
2.6.3 Utilização da visão computacional.....	35
2.7 Relação da visão computacional com a álgebra .....	36
2.8 Transformações geométricas na visão computacional.....	36
2.8.1 Transformação de escala.....	37
2.8.2 Transformação de translação .....	38
2.8.3 Transformação de rotação .....	38
2.8.4 Transformação de cisalhamento .....	38
2.8.5 Transformação de reflexão .....	39
 3 TRABALHOS RELACIONADOS .....	 41
3.1 Prototipação de uma solução para controle de dispositivos em casas inteligentes por meio do reconhecimento de gestos estáticos e biometria facial .....	41
3.2 Estudo comparativo de algoritmos de biometria facial disponibilizado pela biblioteca OpenCv para controle de acesso.....	42
3.3 Utilização de visão computacional para detecção de posicionamento e desvios de veículos autônomos em faixas de rolagem.....	43
3.4 Introdução ao Processamento de Imagens ou Aplicação da Álgebra Linear? .....	44
 4 MATERIAIS E MÉTODOS .....	 46
4.1 Procedimentos metodológicos.....	46
4.1.1 Métodos de pesquisa.....	46
4.1.2 Modo de abordagem da pesquisa.....	46
4.1.3 Objetivos da pesquisa.....	47
4.1.4 Procedimentos técnicos usados na pesquisa .....	47
4.2 Tecnologias .....	48
4.2.1 Linguagem de Programação C++ .....	48

4.2.2 OpenCv .....	48
4.2.3 Cmake .....	49
4.2.4 GeoGebra .....	49
 5 DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	50
5.1 Aplicação da Álgebra Linear em Transformações Geométricas utilizando GeoGebra .....	50
5.1.1 Aplicação da transformação de escala .....	51
5.1.2 Aplicação da transformação de rotação .....	52
5.1.3 Aplicação da transformação de reflexão .....	53
5.1.4 Aplicação da transformação de cisalhamento .....	54
5.1.5 Aplicação da transformação de Translação .....	55
5.1.5 Aplicação de transformações utilizando coordenadas homogêneas .....	56
5.1.6 Aplicação de transformações sucessivas .....	57
5.2 Aplicação da Álgebra Linear em Transformações Geométricas utilizando OpenCV .....	58
5.2.1 Aplicação da transformação de escala .....	59
5.2.2 Aplicação da transformação de rotação .....	60
5.2.3 Aplicação da transformação de reflexão .....	61
5.2.4 Aplicação da transformação de cisalhamento .....	62
5.2.5 Aplicação da transformação de translação .....	63
5.3 Análise dos resultados .....	63
 6 CONCLUSÕES .....	65
6.1 Trabalhos futuros .....	66
 REFERÊNCIAS .....	67

## 1 INTRODUÇÃO

Não é difícil perceber um número expressivo de pesquisas relacionadas à área da Visão Computacional. Diversos artigos, livros e *sites* tratam do assunto que se apresenta de maneira aderente à realidade atual, tendo presente as inúmeras áreas de aplicações destas tecnologias que englobam a Visão Computacional, desde carros autônomos, casas inteligentes, sistemas biométricos da área de segurança, entre outros. Juntamente com o crescimento das pesquisas de Visão Computacional, torna-se cada vez mais necessária uma maior compreensão sobre o funcionamento destes algoritmos, bem como suas otimizações, a fim de reduzir as possibilidades de erro, entregando uma maior confiabilidade a seus utilizadores.

Paiva (2013), ressalta que a Matemática por se apresentar como um caráter universal de quantificar e de expressar, pode ser entendida como linguagem, sendo incorporada uma característica única. Aponta que a matemática está impregnada em quase todas as atividades da vida atual (na Informática, na música, no comércio, na meteorologia, na medicinal, nas comunicações etc.), permitindo assim que as pessoas codifiquem, ordenem, criem e analisem índices ou taxas, avaliando-as e interpretando-as. Também considerada como ciência que desenvolve processos de construção e validação de conceitos, elaborando e refutando argumentos.

Segundo Boyer (1988), com a chegada do computador e o uso da Álgebra Linear da maneira que a conhecemos hoje, muitos matemáticos e engenheiros desenvolveram instrumentos capazes de reinventar o interesse por técnicas numéricas e algorítmicas, substituindo cálculos por ideias. Dawson-Howe (2014), aponta a visão computacional como algo baseado na capacidade da percepção da visão humana, tendo como objetivo a análise de imagens através de sistemas computacionais. Com a obra de Forsyth e Ponce (2002), torna-se possível, relacionar o estudo da matemática de forma direta à Visão Computacional, abordando

assuntos como Álgebra Linear e relacionado a aplicação da mesma com a utilização de matrizes e vetores.

Considerando as crescentes pesquisas e aplicações direcionadas à área da Visão Computacional e a necessidade de um maior embasamento teórico matemático sobre o assunto, torna-se possível a realização de uma pesquisa que contemple assuntos introdutórios através de uma relação entre conteúdo da Álgebra Linear e suas aplicações em algoritmos de Transformações Geométricas em bibliotecas de Visão Computacional.

## **1.1 Tema**

Utilização da Matemática na área da computação.

### **1.1.1 Delimitação do tema**

Utilização da Matemática com ênfase na Álgebra Linear e suas aplicações em Transformações Geométricas utilizadas na Visão Computacional.

## **1.2 Questão da pesquisa**

Quais as relações entre conteúdo da Álgebra Linear e as Transformações Geométricas utilizadas na Visão Computacional? Qual a importância da utilização da Álgebra Linear na Visão Computacional?

## **1.3 Hipótese**

O domínio dos conhecimentos fundamentais da Álgebra Linear pode auxiliar na compreensão das Transformações Geométricas, utilizadas na Visão computacional, permitindo a otimização de algoritmos relacionados.

## **1.4 Objetivos**

Os objetivos do trabalho exercem papéis mediadores entre o tema central e a hipótese a ser confirmada ou não durante a execução do estudo. A seguir são apresentados os objetivos gerais e específicos do estudo.

### **1.4.1 Objetivo geral**

Desenvolver uma pesquisa bibliográfica que demonstra a correlação entre as Transformações Geométricas utilizadas na Visão Computacional e a Álgebra Linear, partindo de uma imagem já adquirida focando na manipulação dela.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

São designados como objetivos específicos:

- Pesquisar e aprimorar os conhecimentos em relação à aplicação de Álgebra Linear na Visão Computacional.
- Identificar as principais Transformações Geométricas utilizadas para a manipulação de imagens na Visão Computacional.
- Realizar um demonstrativo da similaridade entre conteúdo da Álgebra Linear e algoritmos de processamento e manipulação de imagem que fazem uso das Transformações Geométricas.

## **1.5 Justificativa**

Com este trabalho pretende-se demonstrar a utilização da Álgebra Linear em Transformações Geométricas presentes na Visão Computacional, comprovando que a sua utilização é essencial para um bom entendimento e aplicabilidade. Em entrevista à Revista Cálculo, William Gilbert Strang, professor do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, ressalta que cursos de exatas deveriam dar mais ênfase na Álgebra Linear que ao Cálculo Diferencial e Integral, sendo tão fundamental à aplicação de matrizes na Matemática quanto um mochileiro saber se virar com seu inglês, já que os computadores trabalham diretamente com cálculos de matrizes. Baseando-se nessas premissas justifica-se a elaboração e execução desta pesquisa (OSONE, 2014).

## **1.6 Estrutura do trabalho**

O trabalho está estruturado em seis capítulos:

- O primeiro capítulo consiste na apresentação da introdução, descrevendo a proposição do problema, hipótese, objetivos e justificativa.
- O segundo capítulo apresenta a revisão de literatura, levantando a história e utilização dos conteúdos e conceitos, através de referenciação.
- O terceiro capítulo é composto por um resumo de trabalhos relacionados, que tem como objetivo demonstrar a relevância do tema escolhido.
- O quarto capítulo apresenta os materiais e métodos utilizados para a resolução e comprovação da hipótese junto às metodologias utilizadas na elaboração deste estudo. Trazendo a abordagem do problema, objetivo geral, procedimentos técnicos e planejamento do estudo.
- O quinto capítulo apresenta a proposta relacionada ao desenvolvimento e análise dos resultados da pesquisa.
- O sexto capítulo apresenta a conclusão do trabalho e possibilidade de continuidade.

## **2 REVISÃO DA TEÓRICA**

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica com abordagem dos conteúdos que fundamentam o tema escolhido para o trabalho.

### **2.1 O que é Álgebra?**

Segundo Crilly (2017), a álgebra fornece um modo distinto de resolver os problemas, com a mistura do modo de pensar no inverso junto ao método dedutivo. O autor complementa, que nos últimos 500 anos a álgebra significou “a teoria das equações”, onde seus símbolos poderiam representar mais do que apenas números, poderiam representar “proposições”, então a álgebra estaria relacionada ao estudo da lógica, tendo como exemplo de aplicação a álgebra de Grassmann que se aplica em geometria, física e computação gráfica. Liesen e Mehrmann (2015), ressaltam que através de notas históricas é demonstrado que a Álgebra é o resultado de um esforço humano. A Álgebra Linear é uma das ferramentas centrais para a análise teórica de sistemas, bem como o desenvolvimento de métodos de solução eficientes. Outra vantagem é demonstrada sobre uma abordagem matricial da Álgebra Linear dada pelas simplificações ao transferir resultados teóricos para algoritmos práticos.

#### **2.1.1 História da Álgebra**

A Matemática primitiva precisava de embasamento prático para se desenvolver, segundo Eves (2002) fato que se tornou possível graças à evolução e surgimento de formas mais avançadas de sociedade. Sociedades as quais se localizavam às margens de grandes rios como Nilo na África, Tigre e Eufrates na Ásia. O autor salienta que através das drenagens de pântanos, controle de inundações e irrigações era possível transformar as terras destas regiões

em terras agricultáveis e ricas. Esses projetos, segundo o autor, não eram apenas para ligar as localidades anteriormente separadas, mas também serviram para alavancar o desenvolvimento da tecnologia da matemática como aplicações de engenharia, finanças e administração. Assim podemos dizer que a matemática prática surgiu com a necessidade da utilização de sistemas de cálculos de calendário, desenvolvimento de sistemas de peso e medidas para ser empregado na colheita, armazenagem e distribuição de alimentos, construções de canais e em funções comerciais como lançamento e arrecadação de taxas.

A utilização da álgebra pode ser observada em diversas civilizações antigas, segundo Boyer (1988), a Álgebra Egípcia tratava muito de equações lineares, porém os babilônios as acharam exageradas para merecer muita atenção. Exemplo de uma problematização egípcia apresentada pelo autor: Pede-se o peso  $x$  de uma pedra se  $(x + x/7) + (1/11)(x + x/7)$ , tiver como resposta 60 a afirmação torna-se verdadeira, pois para o egípcios 60 gin é considerado uma mina. Já Eves (2002), aponta que meados de 2000 a.C. A aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra bem desenvolvida, sendo que não eram apenas resolvidas equações quadráticas, porém já discutiam funções cúbicas e algumas biquadradas. Eves (2002) argumenta que em algumas tábuas datadas de cerca de 1600 a.C. foram identificados centenas de problemas resolvidos, envolvendo equações simultâneas que utilizavam equações biquadradas como resolução. O autor também ressalta que os gregos antigos possuíam ideias engenhosas para efetuar operações algébricas, tendo como um grande nome Diofanto de Alexandria que teve uma importante contribuição para o desenvolvimento da álgebra, se tornando uma grande influência sobre os Europeus que posteriormente passaram a se dedicar às teorias dos números.

Podemos perceber que a utilização da álgebra vem desde os tempos antigos, principalmente quando se trata de sistemas de equações lineares, mesmo que em muitas vezes as aplicações tenham sido isoladas. Segundo Boyer (1988), o método dos mínimos quadrados foi utilizado pela primeira vez por Carl Friedrich Gauss por volta do século XVIII, mas foi somente em meados do século XIX que a álgebra começou a se tornar o que chamamos hoje de Álgebra Linear. O autor salienta que com o tempo, a álgebra foi se tornando mais abstrata, incorporando conteúdos como matrizes e tensores, transcendendo a sua aplicação à matemática pura, alcançando a relatividade geral, estatística e mecânica quântica.



## 2.2 Conteúdos e conceitos da Álgebra Linear

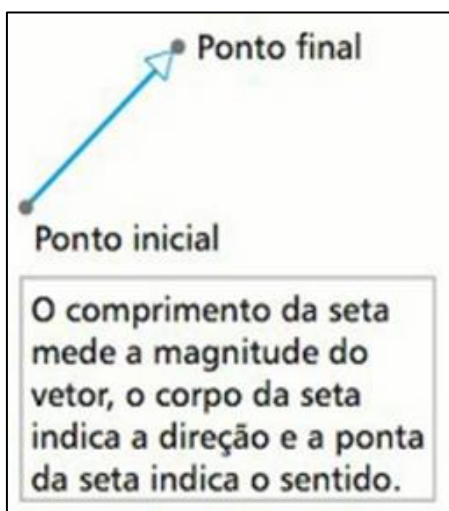
Nesta seção serão apresentados conteúdos e conceitos referentes à Álgebra Linear, a fim de introduzir ao leitor temas que serão abordados ao longo do desenvolvimento do presente trabalho.

### 2.2.1 Vetores e sistemas de coordenadas

Segundo Possani (2019), vetor é um conjunto de todos os segmentos orientados e equivalentes. Já a natureza do vetor se dá através de uma classe de equivalência, cujo conjunto de todos os representantes são segmentos orientados que possuem o mesmo módulo, direção e sentido. A Álgebra Linear possibilita trabalhar com apenas um representante do conjunto, sendo assim, todas as modificações realizadas sobre o representante, são replicáveis em qualquer vetor do conjunto.

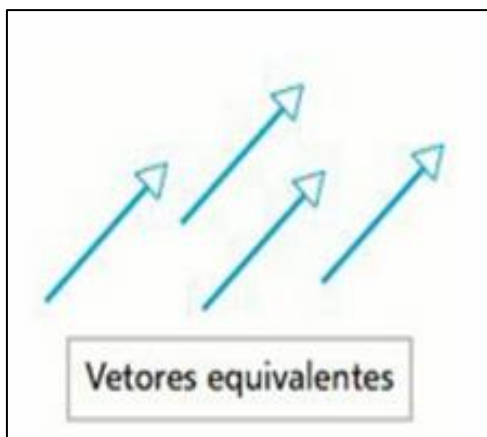
Os vetores equivalentes, segundo Anton e Busby (2006), são dois vetores que possuem mesmo módulo, direção e sentido, sem a necessidade de ter o mesmo ponto de origem e ponto final (FIGURA 1). Na Figura 2, são apresentados alguns vetores, representados por setas e a equivalência é representada por um sinal de igualdade entre os vetores.

Figura 1 - Representação de um vetor



Fonte: Anton; Busby (2006, p. 24).

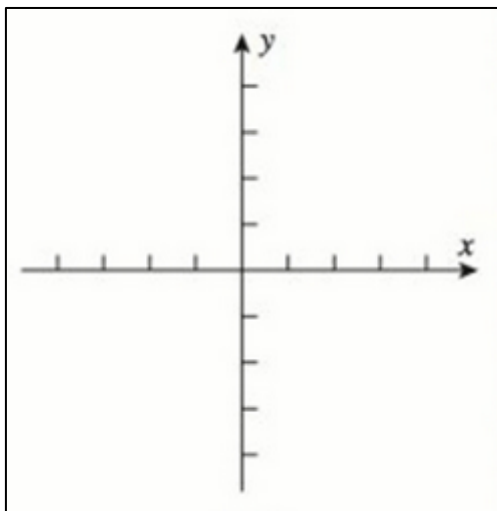
Figura 2 - Vetores equivalentes



Fonte: Anton; Busby (2006, p. 24).

Anton e Busby (2006), destacam a utilização de vetores como setas, facilitando a representação geométrica, contudo se torna desejável ter uma representação que descreva os vetores de maneira algébrica. Assim se torna imprescindível a utilização de um sistema de coordenadas. Os autores recordam o sistema de coordenadas retangulares no plano, que consiste em dois eixos coordenados perpendiculares que são denominados de eixo  $x$  e eixo  $y$ . O ponto de interseção é nominado origem do sistema de coordenadas (FIGURA 3).

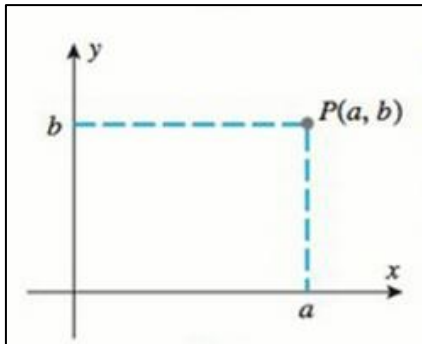
Figura 3 - Sistema de coordenadas retangulares



Fonte: Anton; Busby (2006, p. 27).

Uma vez definido o sistema de coordenadas, torna-se possível a construção da Figura 3, onde temos um ponto  $P$ , associado a um único par ordenado  $(a, b)$  de números reais, representado por  $P(a, b)$ .

Figura 4 - Ponto em um sistema de coordenadas



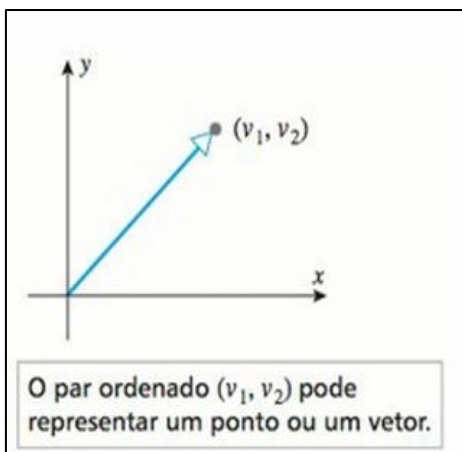
Fonte: Anton; Busby (2006, p. 27).

### 2.2.2 Vetores no plano

Possani (2019), apresenta dois espaços  $E^3$  e  $R^3$ , sendo o  $E^3$ , o espaço dos pontos em três dimensões, onde cada elemento deste espaço é um ponto e não um vetor. Em  $E^3$ , um segmento orientado é composto por dois pontos no espaço, um inicial e um final. Já no  $R^3$ , trabalha-se com pares ordenados, com equações de retas, onde o ponto é representado por um par ordenado fazendo parte da reta, se os pares de pontos satisfazem a equação da reta. Assim é possível fazer diversos cálculos de geometria analítica.

Anton e Busby (2006), salientam que algebricamente, os vetores no plano podem ser vistos como pares ordenados de números reais e os vetores no espaço como ternos ordenados de números reais. Sendo assim, sem ter informação adicional não há como dizer se o par ordenado representa o ponto de coordenadas ou um vetor de componentes. Na Figura 5 é apresentada a situação.

Figura 5 - Par ordenado



Fonte: Anton; Busby (2006, p. 28).

### 2.2.3 Operações com vetores

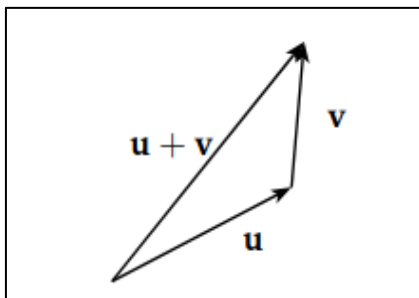
Miranda, Grisi e Lodovici (2015), definem duas operações envolvendo vetores, sendo elas: Soma e Multiplicação por escalares. Sendo grandezas escalares aquelas representadas por um único valor real, seguindo essa tradição os autores denominam um número real  $\lambda$  de escalar.

Segundo os autores podemos realizar a multiplicação de  $\lambda$  e  $v$  obtendo um vetor  $\lambda v$ , se seguidas algumas regras como:

- Se o  $v$  é nulo ou o escalar  $\lambda$  é zero, então o  $\lambda v = 0$ .
- Se  $\lambda > 0$ , então o vetor  $\lambda v$  apresenta o mesmo sentido, direção e comprimento.
- Se  $\lambda < 0$ , então o vetor  $\lambda v$  tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor  $v$ .

Na soma de dois ou mais vetores os autores apontam a forma que os mesmos devem ser somados: a soma,  $v + u$ , de dois vetores  $v$  e  $u$  é determinada a partir de um segmento orientado  $\underline{AB}$ , representante de  $v$ , tendo um segmento orientado  $\underline{BC}$  como representante de  $u$ , com sua origem na extremidade final do representante de  $v$ , definindo  $v + u$  como vetor representado pelo segmento orientado  $\underline{AC}$ , tendo o segmento que vai dar origem ao representante de  $v$  até a extremidade final do representante  $u$  (FIGURA 6).

Figura 6 - Soma de vetores



Fonte: Miranda; Grisi; Lodovici (2015, p. 9).

### 2.2.4 Matrizes

Segundo Franco (2016), as matrizes possuem grande utilidade em quase todos os ramos das ciências exatas, aparecendo em diversos problemas executados pelos computadores. A autora apresenta uma matriz real, sendo uma tabela de  $m$  vezes  $n$  números reais dispostos em  $m$  linha e  $n$  colunas. A representação de uma matriz, geralmente é dada por uma letra maiúscula e todos os seus elementos pela mesma letra equivalente minúscula possuindo dois índices.

Para exemplificar a autora utiliza uma matriz  $A$ ,  $m \times n$ , representada na Figura 7, onde cada elemento  $a_{ij}$  o índice  $i$  indica a linha e  $j$  a coluna em que o elemento se encontra, sendo  $m$  e  $n$  elementos inteiros, onde  $m \geq 1$  e  $n \geq 1$ . Se o elemento estiver na 2ª linha e na 3ª coluna, ele será  $a_{23} = 6$  (FIGURA 8).

Figura 7 - Representação de uma matriz  $A$ ,  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Fonte: Franco (2016, p. 15).

Figura 8 - Elementos de uma matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Fonte: Franco (2016, p. 15).

Franco (2016) observa que uma matriz apresenta uma diagonal principal onde conjunto de todos os elementos de  $a_{ij}$  tais que  $i = j$ , e na diagonal secundária representada por todos os conjuntos de elementos  $a_{ij}$  tais que  $i + j = n + 1$  (FIGURA 9).

Figura 9 - Diagonal principal e secundária

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal secundária      diagonal principal

Fonte: Franco (2016, p. 17).

### 2.2.5 Tipos de matrizes

Segundo Franco (2016), existem vários tipos de matrizes, mas para a realização deste trabalho, será focado em apenas quatro da lista apresentada pela autora, sendo elas:

- Matriz linha: é uma matriz que possui apenas uma linha, isto é  $m = 1$ .
- Matriz quadrada: é a matriz onde o número de linha é igual ao número de colunas, isto é  $m = n$ .
- Matriz retangular: é a matriz onde o número de linhas é diferente do número de colunas, isto é  $m \neq n$ .
- Matriz identidade: é uma matriz que possui o valor um(1) atribuído a sua diagonal principal, isto é  $a_{i=j} = 1$ .

### 2.2.6 Operações com matrizes

Franco (2016) apresenta diversas operações com matrizes, sendo elas soma, subtração e multiplicação. Para realização deste trabalho é apenas necessária a multiplicação de matrizes. Segundo a autora, para multiplicarmos uma matriz pela outra devemos seguir a multiplicação de maneira ordenada, onde a linha  $i$  pela coluna  $j$  significa multiplicar o primeiro elemento da linha  $i$  pelo primeiro elemento da coluna  $j$ , assim sucessivamente. A autora exemplifica o processo através da multiplicação de uma matriz  $A$  por uma matriz  $B$  (FIGURA 10). O produto de duas matrizes é obtido através do processo da multiplicação ordenada exemplificada anteriormente, juntamente com a adição das parcelas geradas pela multiplicação das linhas pelas colunas (FIGURA 11).

Figura 10 - Matriz A e B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Fonte: Franco (2016, p. 18).

Figura 11 - Multiplicação da matriz A pela matriz B

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 1(1) + 2(-2) + (-3)(2) & 1(3) + 2(2) + (-3)(-4) & 1(0) + 2(3) + (-3)(1) \\ 2(1) + 5(-2) + (-4)(2) & 2(3) + 5(2) + (-4)(-4) & 2(0) + 5(3) + (-4)(1) \\ (-3)(1) + 0(-2) + 2(2) & (-3)(3) + 0(2) + 2(-4) & (-3)(0) + 0(3) + 2(1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - 4 - 6 & 3 + 4 + 12 & 0 + 6 - 3 \\ 2 - 10 - 8 & 6 + 10 + 16 & 0 + 15 - 4 \\ -3 + 0 + 4 & -9 + 0 - 8 & 0 + 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 19 & 3 \\ -16 & 32 & 11 \\ 1 & -17 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Fonte: Franco (2016, p. 18).

### 2.3 Transformações geométricas lineares e afins

Mabuchi (2000), aponta que diversos autores consideram a origem das transformações geométricas na geometria analítica, mesmo que ela seja considerada uma aplicação da álgebra à geometria. As transformações geométricas no plano, segundo o autor, são uma aplicação bijetora do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo. Tendo as principais transformações no plano euclidiano com: Reflexões em retas, translações, rotações e homotéticas (modificação da escala).

#### 2.3.1 Transformações lineares

As transformações lineares no plano segundo Rosa (2009), podem ser chamadas de função, tendo o domínio e o contradomínio no  $\mathbf{R}^n$ , podendo assim, representar o movimento de uma figura geométrica no plano. Já Lay (2007), demonstra que uma transformação linear no plano, nada mais é que uma função que pode ser interpretada a partir da equação matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Nesta equação a matriz  $\mathbf{A}$ , age através de uma multiplicação sobre um vetor  $\mathbf{x}$  transformando-o no vetor  $\mathbf{b}$ .

#### 2.3.2 Transformações afins

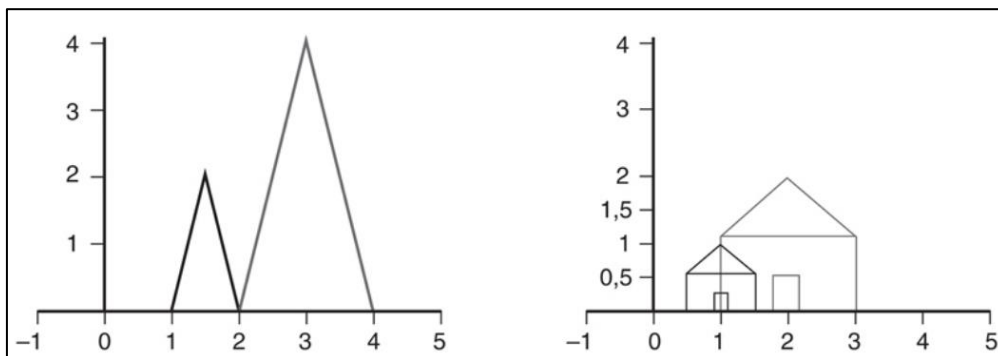
Segundo Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), as transformações afins preservam a proporção antes e depois da transformação, mantendo as linhas retas, preservando o paralelismo e relações de distância sobre uma linha, mas não necessariamente mantendo o ângulo entre duas retas concorrentes. Os autores apontam as transformações lineares e afins, utilizadas na manipulação de objetos de duas dimensões (2D) e objetos de três dimensões (3D), como

Transformação de escala, rotação, reflexão, cisalhamento e translação. Também definem a Transformação Linear em manipulação de elementos de uma matriz que apresenta as mesmas dimensões que os pontos transformados. Os autores apontam que as transformações de Escala e Rotação são consideradas transformações básicas, já que transformações de reflexão e cisalhamento podem ser entendidas como a reescrita das variações e combinações de Rotação e Escala.

### 2.3.2.1 Transformação de escala

Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), definem a transformação de escala como uma transformação que permite mudar as dimensões de um objeto. A Figura 12 ilustra a transformação.

Figura 12 - Exemplos da transformação de escala



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 54).

Os autores demonstram duas formas de definição da transformação de escala, quando relacionada a duas dimensões (2D). A primeira definição foi demonstrada através de uma equação (FIGURA 13), e a segunda através da forma matricial (FIGURA 14). Em ambos os exemplos podemos definir o fator de escala  $s_x$  para a alteração da coordenada  $x$  e pelo fator  $s_y$  para coordenada  $y$ . O  $x'$  e  $y'$  simbolizam as novas coordenadas após a multiplicação das coordenadas iniciais pela matriz de transformação.



Figura 13 - Equação da transformação de escala

$$\begin{aligned} x' &= s_x * x \\ y' &= s_y * y \end{aligned}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 54).

Figura 14 - Matriz da transformação de escala

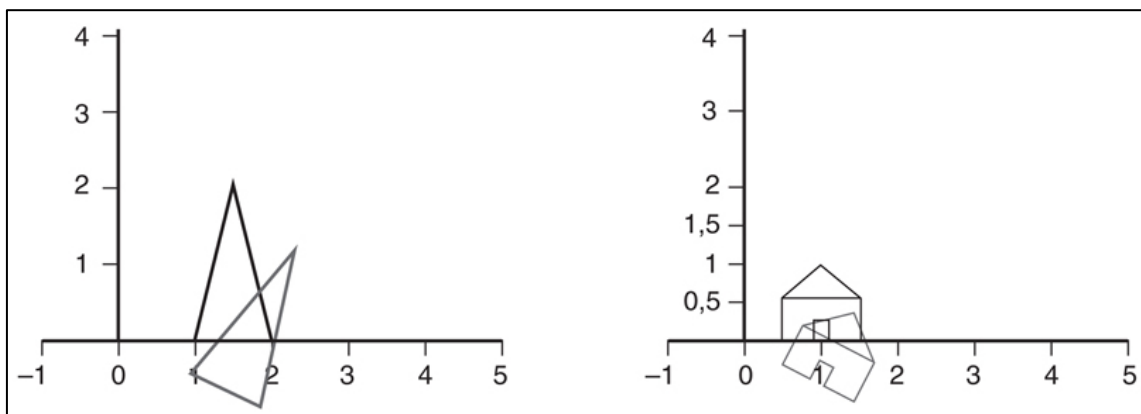
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 55).

### 2.3.2.2 Transformação de rotação

Os autores Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), definem a aplicação da transformação da rotação em duas dimensões (2D) com a equivalência de girar o objeto ao redor da origem do Sistema de Coordenadas (FIGURA 15).

Figura 15 - Exemplo da transformação de rotação



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 57).

Os autores demonstram duas representações da transformação de rotação, a primeira em forma de equação (FIGURA 16), e a segunda em forma matricial (FIGURA 17). Nas duas

representações devem ser informada o ângulo  $\theta$ (theta), que representa o quanto o objeto deve ser rotacionado em relação a origem do Sistema de coordenadas.

Figura 16 - Equação da transformação de rotação

$$\begin{aligned} x' &= x * \cos(\theta) - y * \sin(\theta) \\ y' &= y * \cos(\theta) + x * \sin(\theta) \end{aligned}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 57).

Figura 17 - Matriz da transformação de rotação

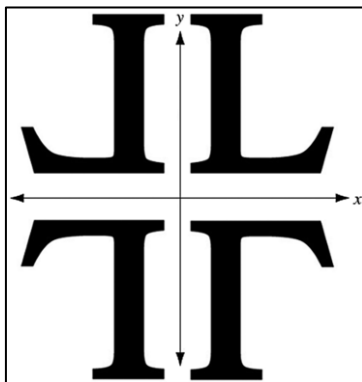
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 57).

### 2.3.2.3 Transformação de reflexão

Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), exemplificam a transformação da reflexão em um objeto, como se fosse um reflexo visto por um espelho posicionado sobre o eixo escolhido para a reflexão (Figura 18). A transformação de reflexão em torno de um eixo também pode ser denominada de espelhamento ou *flip*.

Figura 18 - Exemplo da transformação de reflexão



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 62).

Os autores apresentam uma matriz de transformação de reflexão para cada um dos quadrantes do Sistema de Coordenadas, a Figura 19, representa a transformação em relação ao eixo x (FIGURA 19a), y (FIGURA 19b) e ambos os eixos (FIGURA 19c).

Figura 19 - Matrizes da transformação de reflexão

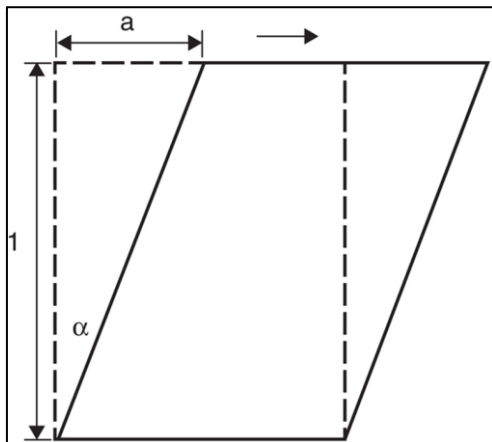
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . \\ (a) & & (b) & & (c) \end{aligned}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 62), editada pelo autor (2020).

#### 2.3.2.4 Transformação de cisalhamento

Os autores Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), pedem para seus leitores imaginarem uma pilha de folhas de papel que forma um grande bloco que, ao aplicar uma força que produz uma distorção de inclinação na pilha (FIGURA 20), os papéis sofrem um deslocamento horizontal, sem ter como efeito a modificação da altura. Este efeito é chamado de Cisalhamento.

Figura 20 - Exemplo da transformação de cisalhamento



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 64).

Os autores apontam que a base do cubo continua parada enquanto a lateral do cubo é inclinada a manter a mesma altura, mas apresentando um ângulo  $\alpha$  (alpha) de deslocamento horizontal. A forma matricial para a representação é dada pela Figura 21, para a transformação em relação ao eixo  $x$  (FIGURA 21a),  $y$  (FIGURA 21b) e ambos os eixos (FIGURA 21c).

Figura 21 - Matrizes da transformação de cisalhamento

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . \\ (a) & & (b) & & (c) \end{aligned}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 64), editado pelo autor (2020).

### 2.3.2.5 Transformação de translação

Transladar um ponto no plano  $\mathbf{p} = (x, y)$  significa deslocá-lo por um vetor  $\mathbf{v} = \langle t_x, t_y \rangle$  de maneira que sua nova posição passa a ser  $\mathbf{p}' = (x + t_x, y + t_y)$ . O mesmo ocorre na translação para pontos do espaço, descritos como  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  e deslocados pelo vetor  $\mathbf{v} = \langle t_x, t_y, t_z \rangle$  para  $\mathbf{p}' = (x + t_x, y + t_y, z + t_z)$  (AZEVEDO; CONCI; VASCONCELOS, 2018). Na Figura 22, temos representação matricial da transformação de translação.

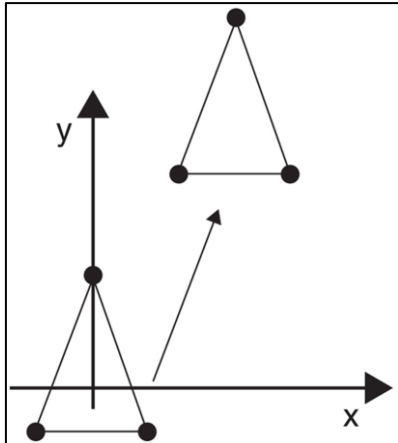
Figura 22 - Matriz da transformação de translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 67).

Os autores Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), exemplificam o pensamento de uma translação inversa de maneira bastante intuitiva. Para inverter uma translação produzida por um vetor  $\mathbf{v}$  aplica-se uma nova translação por um vetor  $-\mathbf{v}$ . Os autores complementam ao falar da movimentação do objeto, através do deslocamento de todos os seus pontos pelo mesmo valor (FIGURA 23).

Figura 23 - Deslocamento de um objeto



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 68).

### 2.3.3 Coordenadas homogêneas

Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), demonstram que as Transformações Afins, que não são resolvidas por multiplicação de matrizes, podem ser reescritas fazendo o uso de uma nova representação. Assim uma transformação  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{A} * \mathbf{v} + \mathbf{b}$ , passa a ser descrita por uma única matriz  $\mathbf{C}$ , como  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{C} * \mathbf{v}$ . Os autores exemplificam a inclusão de uma nova coordenada  $w$ , dita coordenada homogênea, assim os objetos geométricos em duas dimensões (2D) passam a ter três coordenadas  $(x, y, w)$ . Para a representação das transformações em coordenadas homogêneas, as mesmas passam a ser representadas acrescentando à sua matriz original uma terceira coluna e uma terceira linha, contendo apenas zeros, menos em sua última posição da matriz que recebe o valor um (FIGURA 24).

Figura 24 - Matriz original com a adição de uma coordenada homogênea

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} L_{2 \times 2} & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 69).

Os autores descrevem a grande vantagem da utilização de coordenadas homogêneas através da possibilidade da representação das transformações afins e lineares de maneira uniforme. Tendo também a possibilidade da reescrita da formulação geral de transformações lineares e afins (FIGURA 25). A tal uniformidade apresenta sua importância com o surgimento de combinações de conjunto de inúmeras transformações, permitindo a padronização de todas

as matrizes de transformações no mesmo formato, possibilitando assim a multiplicação entre si.

Figura 25 - Reescrita da translação usando coordenadas homogêneas

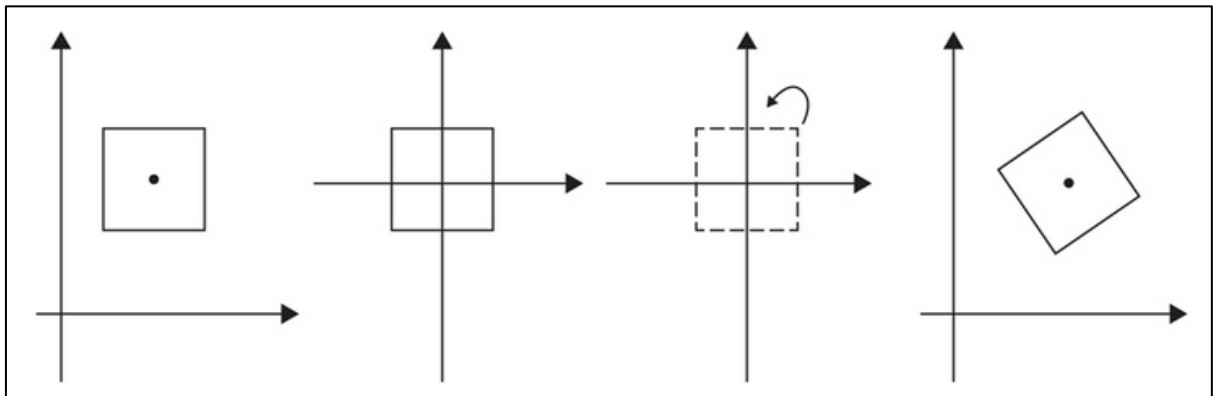
$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} L_{2 \times 2} & t_x \\ & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 69).

### 2.3.4 Combinação de Transformações

Segundo Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), as combinações de transformações são interessantes pois possibilitam atender a especificações de uma determinada situação, atribuindo incontáveis combinações possíveis. Fazem a exemplificação sobre a transformação de rotação sobre um ponto qualquer, apenas utilizando duas transformações base, a Translação e a Rotação. Na Figura 26 é ilustrado o passo a passo de múltiplas transformações a fim de rotacionar um objeto geométrico sobre um ponto específico.

Figura 26 - Passo a passo da rotação em um ponto específico



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 71).

Primeiramente leva-se o ponto que será utilizado como centro de rotação  $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$  para a origem do plano, através da utilização da translação pelo vetor  $\mathbf{v} = (0, 0) - \mathbf{c} = \langle -c_x, -c_y, -c_z \rangle$ . Em seguida é aplicada uma rotação pelo ângulo e direção desejada, e por último é realizada uma translação do ponto do centro de rotação para sua posição original  $\mathbf{v} = \mathbf{c} = \langle c_x, c_y, c_z \rangle$ .

## 2.4 Uma visão matemática sobre a evolução da computação

Para a computação evoluir até o ponto que alcançamos hoje e para manter seu ritmo de crescimento exponencial, devemos agradecer aos vislumbres de diversos engenheiros, matemáticos e físicos que, através de cálculos e práticas, tornaram possíveis essas evoluções. Segundo Boyer (1988), chega a ser irônico que muitos matemáticos puros perseguiam como seus principais objetivos a substituição de cálculos por ideias, enquanto engenheiros e matemáticos aplicados desenvolveram instrumentos capazes de reinventar o interesse por técnicas numéricas e algorítmicas, afetando profundamente a composição de muitos departamentos de matemática através da chegada do computador. Já Eves (2002), afirma que os progressos que permitiram a chegada dos sofisticados computadores eletrônicos atuais, descendem dos antigos instrumentos de cálculo mecânico simples, particularmente revolucionários por conter a ideia de uma máquina operar com dados armazenados e com um programa composto por instruções.

Eves (2002), em seu livro *Introdução à História da Matemática*, apresenta uma seção sobre a história da evolução dos computadores, abordando sua origem mecânica e a evolução até a chegada dos computadores digitais. O autor aponta o protótipo de Blaise Pascal em 1642, sendo uma das primeiras máquinas de somar inventadas até então. A necessidade da criação desta máquina veio através da observação de Pascal, enquanto seu pai realizava diversos cálculos fatigantes, já que o mesmo era coletor regional de impostos. Essa máquina possui a possibilidade de trabalhar com até 6 dígitos, possuindo mostradores analógicos com números impressos de 0 a 9, ao modo que quando um número tirava o próximo da sua esquerda que representava a unidade decimal era incrementado, com esse processo de transportar a adição era realizada de forma mecânica.

Em seguida Eves, aponta o Alemão Leibniz, juntamente com o inglês Sir Samuel Morland, como inventores de uma máquina que realizava multiplicações. Já em 1829, Thomas de Colmar mesmo sem conhecer muito bem o trabalho de Leibniz, transformou a máquina de multiplicação em uma máquina capaz de dividir e subtrair. Mas em 1875, o americano Frank Stephen Baldwin registrou a patente da primeira máquina capaz de realizar as quatro operações básicas. Eves já considerava um grande avanço o fato de existir máquinas que realizavam as quatro operações básicas, mas em 1823 o matemático inglês Charles Babbage, começou a trabalhar em um plano ambicioso. O plano o qual era construir uma máquina projetada para executar de forma automática uma série de operações aritméticas prescritas por um operador, sendo chamada de Máquina Analítica, mas ela nunca chegou a ficar pronta.

Boyer (1988) apresenta uma grande mudança com a chegada de 1940, mudança causada pelo envolvimento de matemáticos no esforço da guerra, muitos jovens matemáticos desempenharam um papel no desenvolvimento do computador eletrônico digital automático. Com essas mudanças Eves (2002), relata o contrato do Departamento Naval dos Estados Unidos com a Universidade de Harvard e a International Business Machines Corporation (IBM), para desenvolver o projeto que se chamaria de Automatic Sequence Controlled Calculator ‘o ASCC’. O ASCC nada mais era que um descendente direto da Máquina Analítica de Babbage, sendo finalizada em 1944, com aproximadamente 15 metros de comprimento por 2,5 de altura, tinha 750000 componentes, ligados a 80400 metros de fio, pesando aproximadamente cinco toneladas. Com esse avanço era possível realizar cálculos e aproximações de uma forma nunca vista antes.

## **2.5 Aplicação da álgebra na computação**

Neste tópico será abordada a utilização da Álgebra na Computação, demonstrando uma relação com os conceitos apresentados anteriormente.

### **2.5.1 Sistema de coordenadas do dispositivo**

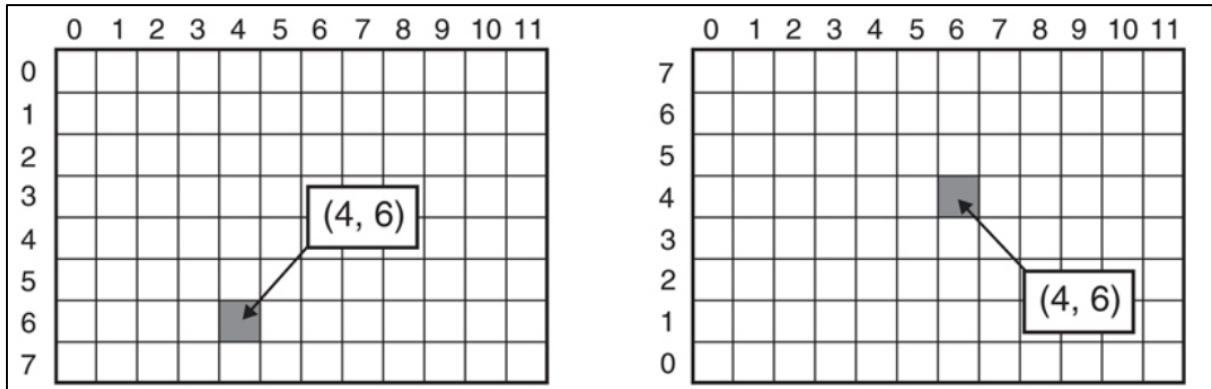
Segundo Azevedo, Conci e Vasconcelos (2018), a imagem final produzida por um processo de renderização é composto por uma matriz de *pixels* que representa os pontos em uma imagem. Cada um dos *pixels* é associado a um tom de cinza ou a uma cor. Também apontam a necessidade de definir uma quantidade de *pixels* utilizados, referentes a resolução espacial da imagem, junto a quantidade de memória utilizada para a apresentação das cores em cada *pixel*.

Os autores argumentam que os sistemas de coordenadas, lidam com as devidas características apresentadas pela imagem, possibilitando o surgimento de uma diferenciação entre coordenadas e referências, quando tratamos de diferentes dispositivos. Assim torna-se necessário o mapeamento das coordenadas em um sistema de eixo  $x$  e  $y$ , em um novo sistema de referência de coordenadas, mapeando-a em índices da matriz da imagem de saída.

Na Figura 27, apresenta um sistema de coordenadas de um dispositivo, tendo uma orientação do eixo vertical induzindo as linhas numeradas de cima para baixo, no exemplo da esquerda, ou de baixo para cima, no exemplo da direita.



Figura 27 - Sistema de coordenadas em um dispositivo



Fonte: Azevedo; Conci; Vasconcelos (2018, p. 41).

### 2.5.2 Combinações Lineares e aplicação de modelo de cores

Os autores Anton e Busby (2006), apontam que as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar em um vetor, são frequentemente utilizadas em combinações para formar novos vetores. Complementam que as cores nas telas de computadores, são formadas utilizando combinações lineares a partir de três cores, no chamado modelo *RGB*. No modelo *RGB* as cores são criadas juntando percentagens de três cores primárias, vermelho (com a inicial *R* do inglês *red*), verde (com a inicial *G* do inglês *green*) e o azul (com a inicial *B* do inglês *blue*). A seguir temos a representação de três vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{b}$ , os quais representam as três cores primárias:

- $\mathbf{r} = (1,0,0)$ (vermelho puro)
- $\mathbf{g} = (0,1,0)$ (verde puro)
- $\mathbf{b} = (0,0,1)$ (azul puro)

Com as combinações lineares de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{b}$ , podemos criar todas as outras cores usando coeficientes entre 0 e 1. Esses coeficientes representam a percentagem de cada cor pura na mistura. O conjunto de todas estas cores é o cubo de cores *RGB* no espaço, assim cada vetor de cor  $\mathbf{c}$  neste espaço pode ser expresso com uma combinação linear (FIGURA 28).

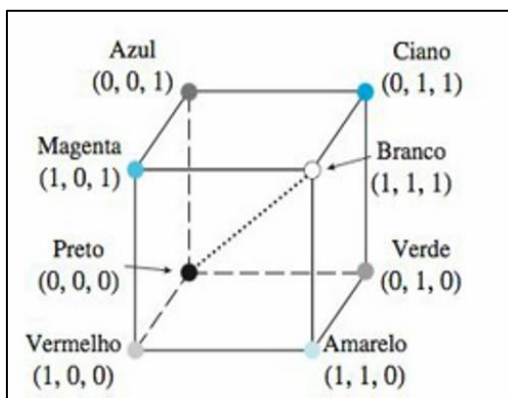
Figura 28 - Conjunto do cubo RGB

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{r} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{b} = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

Fonte: Anton; Busby (2006, p. 33).

Os vértices do cubo da Figura 29, representam as cores primárias puras, junto com o preto, branco, magenta, ciano e amarelo, o vetor diagonal entre o preto e o branco representam as tonalidades de cinza.

Figura 29 - Cubo de cores RGB



Fonte: Anton; Busby (2006, p. 33).

## 2.6 Visão computacional

Neste tópico da seção será abordada uma síntese sobre os assuntos relacionados a área da Visão Computacional, explicando o que é, um pouco de sua história junto a sua evolução e aplicações.

### 2.6.1 O que é visão computacional?

Dawson-Howe (2014) define Visão Computacional como uma análise automática de imagens e vídeos por meio de um sistema computacional com objetivo de obter uma compreensão do mundo, inspirada pela capacidade de visão humana. Inicialmente pensava-se que era um problema simples de ser resolvido, devido ao processamento parecer algo intuitivo para a nossa mente se compararmos com o nosso próprio sistema visual. Mas o sistema visual humano apresenta-se de maneira muito complexa. Estima-se que o encéfalo humano utiliza por volta de 25% a 50% de sua capacidade para processar as imagens e realizar múltiplas interpretações ao visualizar uma imagem e contextualizá-la.

Já Szeliski (2011) complementa que a Visão Computacional apresenta-se como um tópico desafiador por apresentar uma ampla variedade de matemática abordada. Pela natureza intrinsecamente difícil dos problemas a serem resolvidos o autor aponta que a Visão Computacional envolve a solução de problemas inversos ou estimativas de quantidades desconhecidas e, para estes problemas, muitas vezes torna-se fácil uma descrição matemática do mesmo. Também relata a complexidade da visão humana em um contraponto ao processamento que um sistema computacional deve realizar para chegar nas mesmas conclusões.

### **2.6.2 História da visão computacional**

Nesta seção serão ilustrados alguns avanços da área da Visão Computacional desde seu início até a contemporaneidade. Em seu artigo Visão Computacional: Evolução e Promessa, Huang (1996) cita Larry Roberts como pai da Visão Computacional que, em sua tese de doutorado de 1960 realizada no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), discute as possibilidades de extrair informações geométricas 3D a partir de uma perspectiva 2D de um poliedro. Assim muitos outros pesquisadores do Instituto de Tecnologia e de outros lugares estudaram o contexto da Visão Computacional no mundo dos blocos, percebendo a necessidade de lidar com imagens do mundo real. Com o surgimento dessa necessidade, muitas outras pesquisas chamadas de visão de baixo nível foram inicializadas dando surgimento da detecção e segmentação de bordas.

Szeliski (2011) ressalta que no início dos anos 70 a Visão computacional era vista como um componente de percepção visual com o propósito de imitar a inteligência humana e dotar robôs de comportamento inteligente. Nessa época alguns pesquisadores de diversas universidades acreditavam que a solução do problema da entrada visual, seria um passo fácil no caminho para solucionar problemas mais complexos, mas acabaram por perceber que o problema era maior que o esperado. O que distinguia a visão computacional do campo já existente do processamento digital de imagens, era o desejo de recuperar a estrutura tridimensional do mundo das imagens e usá-las para obter uma compreensão completa da cena. Para explicar quais foram os avanços na área na década 70, o autor utiliza os dados retirados de uma pesquisa de Nalwa (1993), que fez uma revisão dos tópicos estudados na época. O tópico de detecção de borda foi uma área ativa de pesquisa, junto a modelagem tridimensional de objetos, estudos sobre variações de sombreamento, formação e orientação da superfície e

sobras, algumas abordagens quantitativas da visão computacional, o primeiro de muitos algoritmos de correspondência estéreo e muitos outros estudos.

Segundo Szeliski (2011), em 1980 o foco da Visão Computacional foi mantido sobre uma visão mais sofisticada sobre a matemática, apresentando técnicas para a realização de análises quantitativas de imagem e cena. Os estudos na década de 80 se deram sobre a ampla utilização de pirâmides de imagem, pesquisa de correspondência, versões contínuas de conceitos de processamento em escala-espço, uso de estéreo como sugestão quantitativa de forma, forma a partir da textura, forma a partir de foco, entre outras discussões sobre as técnicas. Também estiveram presentes outros avanços significativos como uma pesquisa sobre uma melhor detecção de bordas e contornos, uma introdução de rastreadores de contorno em evolução dinâmica e modelos 3D. Os pesquisadores notaram que muitos dos algoritmos de detecção de bordas poderiam ser unificados ou pelo menos descritos, usando a mesma estrutura matemática se fossem colocados como problemas de otimização variacional.

A pesquisa sobre visão computacional nos anos de 1990 continuou a explorar muitos dos pontos levantados anteriormente, alguns até se tornaram significativamente mais ativos. Pode-se ressaltar que houve uma explosão de atividade no uso de invariantes projetivas para reconhecimento e assim se evoluiu para um esforço conjunto para resolver a estrutura do problema de movimento, passando em parte para uma atividade direcionada para reconstruções projetivas que não requerem a calibração da câmera. Simultaneamente, técnicas de monitorização foram desenvolvidas para resolver com eficiência problemas relacionados a câmeras fotográficas e sistemas de modelagem 3D foram totalmente automatizados com tais técnicas. Outro ponto que podemos citar é o surgimento de técnicas de aprendizado estático, primeiramente em análises de aplicações e posteriormente em componentes de reconhecimento facial. Mas o desenvolvimento mais notável na década de 90, segundo Szeliski (2011), se deu pela interação aumentada com computação gráfica, especialmente no âmbito interdisciplinar de modelagem e renderização com base em imagem. Essa ideia de manipular imagem do mundo real para a criação de novas animações ganhou destaque com técnicas de transformação e manipulação de imagens. Ainda na década de 90 foi aplicada a interpolação, costura de imagem para criação de imagem panorâmica, modelagem baseada em imagem com técnicas para criar automaticamente modelos 3D realistas a partir de coleções de imagens.

Szeliski ressalva que com o avançar da década de 90, tornava-se cada vez mais visível a interação entre a visão e os campos gráficos, junto aos tópicos básicos das imagens, renderização, costura de imagem, captura de imagem de alta faixa dinâmica criando assim a fotografia computacional. Com todos esses avanços e a chegada dos anos 2000, surgiu a

necessidade de mapeamento de tons para conversão de imagens devida a rápida adoção de *bracketing* de exposição para criar imagens de alta faixa dinâmica. Além de mesclar múltiplas exposições, foram desenvolvidas técnicas interativas ou automáticas para selecionar regiões diferentes a partir de imagens sobrepostas. Por fim, o autor aponta a tendência que vem dominando as comunidades de pesquisadores sobre reconhecimento visual, a aplicação de técnicas sofisticadas de aprendizagem de máquina à visão computacional. Tendência a qual se apresenta de forma crescente devida a grande disponibilidade de dados utilizados para criação de rótulos presentes na Internet, viabilizando a criação de categorias de objetos sem o uso da supervisão humana.

### **2.6.3 Utilização da visão computacional**

Se realizarmos uma pesquisa na Internet, não será difícil perceber a enorme variedade de projetos e pesquisas acadêmicas que utilizam como foco a área da visão computacional, assim como pode-se perceber a sua importância na automatização industrial. Em seu livro, Dawson-Howe (2014) relata as aplicações da visão computacional na área das indústrias, permitindo a inspeção automatizada na fabricação de produtos manufaturados em qualquer estágio da linha de produção. O autor apresenta alguns exemplos, como a inspeção de placas de circuito impresso para garantir que as faixas e componentes sejam dispostos de maneira correta sobre a superfície das placas. Outro exemplo apresentado é a inspeção de qualidade de impressão de etiquetas e inspeção de frasco para garantir que estejam devidamente cheios. Outras áreas também apresentam seu interesse na resolução de problemas com a utilização da visão computacional, onde pode-se citar a leitura automática de placas de carro em estradas, verificações biométricas de segurança em aeroportos usando imagens de rostos e imagens de impressões digitais, modelos em três dimensões (3D) de edifícios destruídos a partir de fotografias antigas, entre outras aplicações.

Campos, Barboza, Lazaro e Rafalski (2019), em seu artigo, cita a utilização da visão computacional em veículos autônomos, com o intuito de promover um elemento facilitador da direção e detecção de objetos e faixas, proporcionando ao motorista mais confiança, segurança e desempenho ao dirigir. Percebemos que com tantos exemplos de áreas distintas a visão computacional está cada vez mais presente em nosso cotidiano.

## 2.7 Relação da visão computacional com a álgebra

Neste tópico será abordada a relação entre Visão Computacional com a Álgebra, como citado por Crilly (2017) e reforçado através do posicionamento de Liesen e Mehrmann (2015). A Álgebra fornece um modo distinto de resolver problemas, tratando-os como equações relacionadas ao estudo da lógica. Já Silva, Daniel e Silva e Santos (2004), relatam que conteúdos relacionados a álgebra, cálculo e outras, tem um efeito benéfico à computação, desenvolvendo a destreza de raciocínio combinando-as a técnicas computacionais, resultando em algoritmos inteligentes, elegantes e eficientes. Assim chegamos na Visão Computacional, que Dawson-Howe (2014) define como a análise automática de imagens e vídeos por meio de um sistema computacional. Se relacionarmos a Álgebra como o estudo por trás da lógica e equações a fim de solucionar problemas e a Visão Computacional como uma análise de imagens e vídeos por meio de sistemas, podemos convergir os assuntos para o mesmo foco de pesquisa.

Na obra de Forsyth e Ponce (2002), é apontado uma visão aprofundada sobre assuntos relacionados ao funcionamento da Visão Computacional, passando por diversos pontos importantes da Matemática, como o estudo da Álgebra e da Geometria Analítica. O autor dedica um dos capítulos para gerar um embasamento matemático que será necessário para compreender o restante da obra. Neste capítulo o autor refere-se às bases geométricas da formação da imagem, apontando a geometria analítica para quantificar com precisão a relação entre uma câmera e os objetos que a mesma observa. Também são citados pelo autor elementos da geometria euclidiana, incluindo pontos e produtos, distâncias e coordenadas, transformações geométricas como rotações, traduções e projeções em termo de construção de álgebra linear, como vetores e matrizes.

Através da análise da obra de Forsyth e Ponce (2002), foi possível constatar a presença da Álgebra em diferentes pontos relacionados à Visão computacional, sendo visível a constante utilização de vetores e matrizes.

## 2.8 Transformações geométricas na visão computacional

Dawson-Howe (2014), apresenta em sua obra uma prática introdutória sobre a Visão Computacional, abordando inúmeros conceitos matemáticos implementados na biblioteca *OpenCV*. O autor apresenta as transformações geométricas, como transformações que não modificam o conteúdo da imagem, podendo apenas deformar a mesma. Nessas transformações os valores dos *pixels* da imagem de saída são calculados obtendo primeiro as coordenadas dos

*pixels* de entrada, aplicando a função de mapeamento que resulta na cópia dos valores de entrada para a nova posição obtida.

Sobre as Transformações Geométricas o autor aponta dois problemas na utilização destas transformações: A extrapolação dos pontos, onde a transformação pode obter um valor que venha a indicar um pixel fora dos limites da imagem, e a interpolação, que pode gerar uma coordenada de ponto flutuante. No caso da interpolação, o autor aponta que a biblioteca *OpenCV*, faz uso de um arredondamento, onde a coordenada de ponto flutuante é arredondada para o valor inteiro mais próximo.

O autor também apresenta a utilização de transformações afins, que são apresentadas como transformações geométricas que preservam todos os pontos de uma linha inicial em uma linha após a transformação. Esta transformação também preserva a relação entre distância de cada um dos pontos às extremidades das linhas, mas por outro lado as transformações afins não preservam necessariamente os ângulos e comprimentos. Transformações geométricas como escala, translação, rotação, cisalhamento e reflexão, são consideradas transformações afins.

### 2.8.1 Transformação de escala

A transformação de escala, de acordo com García et al (2015), é o redimensionamento de uma imagem a fim de reduzi-la ou ampliá-la. A função da biblioteca *OpenCV* para esta transformação é chamada de *resize*. Para a utilização desta função deve ser informada uma imagem de entrada, uma imagem de saída, o tamanho que a imagem deve ser redimensionada, seguido pelo valor de escala. Na Figura 30, temos a representação da matriz de transformação da escala, onde temos o  $s_x$  como o fator de escala a ser modificada em relação a  $x$  e  $s_y$  como o fator a ser modificado em relação a  $y$ .

Figura 30 - Matriz de transformação de escala (*OpenCV*)

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Fonte: García *et al.* (2015, p. 76).

### 2.8.2 Transformação de translação

A translação, segundo García *et al.* (2015), trata da simples mudança de posição da imagem ao longo de uma direção e distância específica. Na Figura 31 temos a representação da matriz de translação, onde  $t_x$  representa a quantidade a ser trasladada em relação ao eixo  $x$ , e  $t_y$  a quantidade a ser trasladada no eixo  $y$ .

Figura 31 - Matriz de transformação de translação (OpenCV)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \end{bmatrix}$$

Fonte: García *et al.* (2015, p. 77).

### 2.8.3 Transformação de rotação

A transformação de rotação segundo García *et al.* (2015), envolve a utilização de um ângulo específico, a função responsável pela rotação é chamada de *warpAffine*. Na Figura 32, temos a matriz de rotação utilizada na biblioteca *OpenCV*, temos  $x$  e  $y$  como coordenadas do ponto a ser rotacionado e  $sf$  como fator de escala, já que a matriz apresenta-se como uma matriz resultante de várias transformações.

Figura 32 - Matriz de transformação de rotação (OpenCV)

$$M = \begin{bmatrix} sf \cdot \cos(\theta) & sf \cdot \sin(\theta) & (1 - sf \cdot \cos(\theta)) \cdot x - sf \cdot \sin(\theta) \cdot y \\ -sf \cdot \sin(\theta) & sf \cdot \cos(\theta) & sf \cdot \sin(\theta) \cdot x + (1 - sf \cdot \cos(\theta)) \cdot y \end{bmatrix}$$

Fonte: García *et al.* (2015, p. 79).

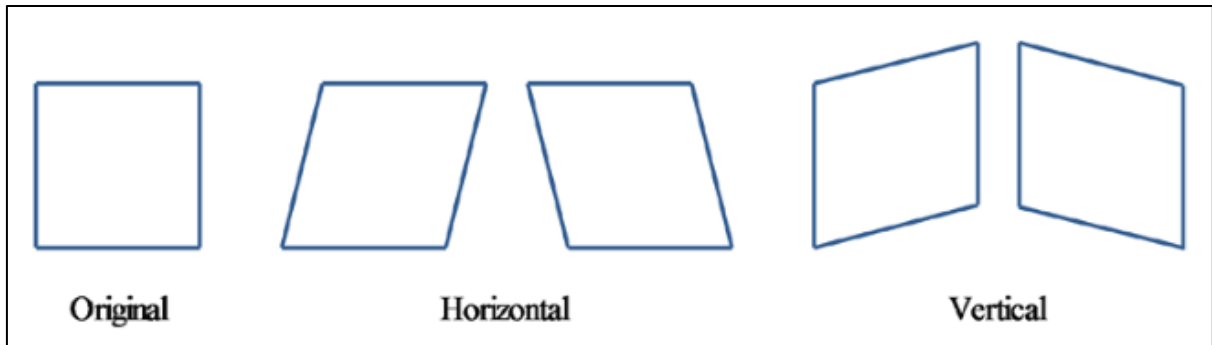
### 2.8.4 Transformação de cisalhamento

García *et al.* (2015), define a transformação de cisalhamento como uma transformação que desloca cada ponto em uma direção fixa por um valor proporcional, geralmente distorcendo a figura geométrica, no entanto uma transformação por cisalhamento preserva a área das figuras



geométricas. A função que realiza a transformação é *warpAffine*. A transformação por cisalhamento pode ocorrer na vertical ou na horizontal como demonstrado na Figura 33. Na Figura 34, temos as matrizes que representam a transformação por cisalhamento vertical e horizontal.

Figura 33 - Tipos de cisalhamento



Fonte: García; *et al.* (2015, p. 81).

Figura 34 - Matriz de transformação de cisalhamento (OpenCV)

$$T_H = \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: García *et al.* (2015, p. 82).

### 2.8.5 Transformação de reflexão

A transformação referente a reflexão por padrão é aplicada sobre os eixos  $x$  e  $y$  argumenta García et al (2015), sendo necessário aplicar uma translação na última coluna da matriz de transformação. O autor aponta que a rotação pode ser relacionada ao eixo  $x$  e  $y$  ou a ambos os eixos como demonstrado na Figura 35, onde temos as matrizes de rotação na horizontal, vertical e em ambas as orientações. E tal como as transformações anteriores a função para aplicar a reflexão é a *warpAffine*.

Figura 35 - Matrizes de reflexão (OpenCV)

$$T_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t_y \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & t_x \\ 0 & -1 & t_y \end{bmatrix}$$

Fonte: García *et al.* (2015, p. 83).

### 3 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção será apresentada uma lista de trabalhos relacionados com o tema da pesquisa proposta, com o intuito de demonstrar a relevância do tema escolhido para a pesquisa. Os trabalhos escolhidos seguiram uma linha de pensamento voltada simplesmente para a utilização de visão computacional e suas tecnologias, focando nos problemas a serem solucionados, sem apresentar a fundamentação teórica por trás dos algoritmos de visão computacional que é o foco deste trabalho.

#### **3.1 Prototipação de uma solução para controle de dispositivos em casas inteligentes por meio do reconhecimento de gestos estáticos e biometria facial**

No trabalho realizado por Etgeton (2019), o autor desenvolveu um protótipo para uma solução de um controle de dispositivos de casas inteligentes que utiliza o reconhecimento de gestos e biometria facial. O objetivo era controlar um dispositivo conectado por meio do reconhecimento de gestos estáticos da mão, e garantir a segurança por meio da autenticação da biometria facial dos usuários.

O desenvolvimento do trabalho apresentou-se sobre um sistema de visão computacional que utilizou a biblioteca de programação OpenCV (Open Computer Vision) junto a linguagem de programação Python. O protótipo também fez uso de modelos em *Deep Learning* para controlar dispositivos conectados. Durante o desenvolvimento o autor demonstrou o funcionamento e os passos necessários para a implementação do código que realiza o reconhecimento, junto aos métodos e algoritmos necessários.

Como resultado o autor obteve para o reconhecimento em tempo real, um *frame rate* de 3fps (frames por segundo). Para o reconhecimento facial o autor obteve ótimos resultados,

apresentando 1.10% de falsos positivos e para o reconhecimento de gestos estáticos 22.67% de falsos positivos.

O projeto de Etgeton (2019), se difere da proposta presente no desenvolvimento deste trabalho, já que o mesmo teve seu foco na prototipação como resultado ao estudo. Os trabalhos possuem um viés de pesquisa similar onde o objeto de estudo se dá através da Visão Computacional e suas tecnologias.

### **3.2 Estudo comparativo de algoritmos de biometria facial disponibilizado pela biblioteca OpenCv para controle de acesso**

O trabalho de Galimberti (2018), apresenta um comparativo dos algoritmos disponibilizados pela biblioteca OpenCV para realização de reconhecimento facial. A pesquisa se dá através de análise de situações reais de uso de controle de acesso onde a condição de ambiente, luminosidade e tempo de exposição são fatores decisivos para a utilização da biblioteca.

Para a realização do desenvolvimento do trabalho, o autor utilizou a linguagem de programação e a plataforma computacional Raspberry Pi, que realiza chamadas *webservice* para uma aplicação também escrita em Java, que é responsável por realizar o reconhecimento facial utilizando a biblioteca OpenCV. O *webservice* é responsável pelo reconhecimento facial e por armazenar o banco de imagens e informações dos usuários do sistema.

A partir dos testes realizados com a codificação da aplicação, o autor constatou que o algoritmo Fisherfaces apresentou um desempenho superior aos demais, tanto na taxa de reconhecimento quanto em sua velocidade. O autor aponta um crescimento significativo na taxa de reconhecimento através da utilização dos demais algoritmos em conjunto ao Fisherfaces e cadastro de várias faces para o mesmo usuário.

O trabalho de Galimberti (2018), apresenta uma relação a esta pesquisa, por tratar da utilização de algoritmos de visão computacional, mesmo divergindo em questão de planejamento e objetivos a serem alcançados. Pode-se considerar válida a citação para demonstrar que a utilização de visão computacional voltada a área da biometria e segurança está cada vez mais presente em nosso cotidiano.

### **3.3 Utilização de visão computacional para detecção de posicionamento e desvios de veículos autônomos em faixas de rolagem**

O estudo realizado por Campos, Barboza, Lazaro e Rafalski (2019), aborda a detecção de objetos e faixas de rodovias, a fim de proporcionar aos motoristas mais segurança, desempenho e confiabilidade ao dirigir. O autor aponta o avanço da Visão Computacional como o responsável por atrair estudos que possibilitaram o desenvolvimento de algoritmos para atribuições de processamento de imagem em tempo real.

O trabalho tem como objetivo desenvolver um sistema de assistência ao condutor de veículos baseado em Visão Computacional. O autor fez uso da análise de imagens e vídeos extraídos da Internet para utilização de ambientes controlados, simulados através do software Matlab. Não foi considerada a detecção de placas de sinalização de trânsito e de limite de velocidades das vias, o foco se deu através da detecção de faixas dela. O processamento das imagens e algoritmos de detecção de faixa e posicionamento do veículo também foram executados no Matlab. Assim as informações processadas trouxeram a base dos testes apresentados nos resultados.

Como resultado o autor aponta testes com a utilização de dados reais, desconsiderando alguns fatores da propriedade da imagem, como a distorção lateral da lente e a calibração, utilizando assim dados aproximados. Durante as simulações foram encontrados erros de detecção devido a faixas de pedestres e carros de terceiros no percurso, que obstruíram a visibilidade das faixas de rodagem das vias. Através da parte totalizante da análise de imagem em frames, fora constatado pelo autor 65% dos frames uma identificação correta da cena, 25% de erro na análise da faixa direita, 7% de erro na análise da faixa esquerda e 3% de erros referentes a identificação de ambas as faixas. O autor relata seu resultado como satisfatório, gerando alguns erros que podem ser aprimorados em trabalhos futuros.

Este trabalho apresentou a utilização de conteúdos da álgebra linear e geometria analítica, mesmo sem apresentar os termos descritivos. Informações referentes a dados de calibração da câmera, vetores e matrizes utilizadas em transformações de imagem em coordenadas e parâmetros foram aplicadas. Também foram demonstrados alguns algoritmos de visão computacional, com a aplicação de filtros para identificação das faixas e localização no ambiente.

### 3.4 Introdução ao Processamento de Imagens ou Aplicação da Álgebra Linear?

O artigo escrito por Baldino e Silva (2001), tem como seu principal objetivo demonstrar a importância da Álgebra Linear para um curso de Informática. Abordando o processamento de imagens, tendo a construção de um objeto didático constituído por três imagens com dezesseis *pixels* cada uma a fim de analisar a matemática do problema de maneira aprofundada. O problema do artigo consiste em obter a imagem mais nítida.

O problema geral retratado pelos autores se deve, através da suposição do recebimento de três imagens, cada uma com dezesseis *pixels* que tem como atribuição uma intensidade de cinza variando de 0 (preto) a 255 (branco). Após o recebimento das imagens, o problema seria: Como separar os dados relevantes das três imagens, desprezando dados irrelevantes, a fim de economizar espaço no armazenamento dos dados?

Os autores apontam que em um problema “real”, as imagens podem conter de dezenas a milhares de *pixels*, e que a primeira coisa que poderia ser feita para a obtenção de uma imagem mais nítida, seria tomar a média de intensidade de cada um dos *pixel* com o intuito de obter uma imagem média. No entanto, os autores argumentam que esse procedimento acabaria por eliminar só os erros de ruídos aleatórios, pois caso a aquisição das imagens venham a ser realizadas em circunstâncias de iluminação diferentes por exemplo, poderia acarretar um *pixel* escuro sendo apresentado como um *pixel* claro na outra imagem ou vice e versa. Assim a imagem média poderia ser completamente opaca, perdendo sua caracterização.

Através da argumentação do parágrafo anterior, os autores apontam o princípio que as três imagens devem ser conservadas em arquivo e conter certas informações, surgindo assim a necessidade de um método de seleção de dados. Argumentam que um problema composto por imagens de dezesseis *pixels*, não teria a necessidade da utilização de um método, mas justamente por não haver essa necessidade o exemplo em questão se torna didaticamente útil para a exemplificação da matemática envolvida no processo.

Para o desenvolvimento e elaboração do método citado, os autores fizeram uso de matrizes para a representação das imagens, realizaram a construção de histogramas para realizar uma análise da intensidade, gráficos para esboçar a correlação, um método quantitativo para comparação de contraste, sistemas lineares e vetores, para alcançar o resultado da nitidez desejada. Por fim o resultado obtido demonstra que as imagens perderam alguns dados relacionados ao contraste no final da aplicação do método empregado, no entanto obtiveram resultados positivos ao empregar conteúdo da Álgebra Linear junto ao processamento de imagens resultando em uma imagem mais nítida como saída.

Com este artigo, tornou-se fácil perceber a implementação de um método de manipulação da imagem através de uma abordagem didática da utilização da matemática. Foi possível visualizar a utilização de matrizes e sistemas lineares em manipulação de imagem. Apresentando uma abordagem mais expositiva dos conteúdos da Álgebra Linear em relação aos trabalhos apresentados anteriormente.

## **4 MATERIAIS E MÉTODOS**

### **4.1 Procedimentos metodológicos**

Apresenta-se nesta seção os métodos utilizados no desenvolvimento do trabalho, tendo como embasamento os conhecimentos teóricos, subdividida em quatro grupos: Métodos de pesquisa, modo de abordagem, objetivos e procedimentos técnicos da pesquisa.

#### **4.1.1 Métodos de pesquisa**

Para a elaboração deste projeto foi utilizado o método dialético. Segundo Matias-Pereira (2016), o método dialético consiste em uma interpretação dinâmica e totalizante da realidade, impossibilitando as considerações dos fatos fora de um contexto social, político ou econômico sendo amplamente utilizado em pesquisas qualitativas. Já segundo Ramos (2009), o método dialético se fundamenta a partir da transcendência das contradições da problematização, dando origem a uma série de outras contradições que possam exigir soluções, sendo assim um método de interpretação dinâmica e totalizante. Desta forma, o método dialético torna-se aplicável para realizar uma pesquisa aprofundada, resultando em uma abordagem mais concreta sobre a problematização, tendo em vista uma pesquisa sobre a importância da utilização da Álgebra Linear em Transformações Geométricas utilizadas em algoritmos de Visão Computacional.

#### **4.1.2 Modo de abordagem da pesquisa**

Neste trabalho será utilizado o modo de abordagem da pesquisa de forma qualitativa. Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa de caráter qualitativa não tem como objetivo a expressão numérica de seus resultados, e sim uma profunda compreensão do assunto



pesquisado. Os pesquisadores que adotam a abordagem qualitativa não se prendem a um único modelo de pesquisa para todas as ciências. Os autores ressaltam que os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, tornando o desenvolvimento da pesquisa imprevisível. Já Moresi (2003) salienta que o modo qualitativo é uma ferramenta útil para determinar o que é importante, detalhando os porquês e identificando a extensão total da proposta ou opinião. O autor aponta que o modo qualitativo revela as áreas de consenso, positivas e negativas nos padrões de respostas. A abordagem qualitativa foi utilizada para a coleta e seleção das informações contidas na presente pesquisa, dando ênfase a uma abordagem profunda na exemplificação e demonstração das informações.

#### **4.1.3 Objetivos da pesquisa**

A metodologia escolhida em relação ao objetivo geral de pesquisa foi a exploratória, que segundo Gil (2009), visa proporcionar uma familiaridade com o problema abordado facilitando a construção de uma hipótese. Essa pesquisa envolve o levantamento bibliográfico e entrevistas. No entanto, Ramos (2009) explica que a pesquisa exploratória é o primeiro estágio de uma pesquisa científica e tem como objetivo a familiarização com os problemas, tornando-os mais compreensivos; nessa pesquisa é importante levantar hipóteses em resposta aos problemas levantados.

#### **4.1.4 Procedimentos técnicos usados na pesquisa**

Tendo como base a pesquisa bibliográfica como meio de investigação deste trabalho, Matias-Pereira (2016) ressaltam que esta pesquisa é desenvolvida através de materiais já elaborados, que podem ser constituídos por livros, artigos, teses, entre outros trabalhos e publicações. Neste tipo de pesquisa não costuma-se oferecer dados inéditos, como os dados levantados em pesquisa de campo ou de laboratório, mas isso não compromete a possibilidade de originalidade do raciocínio. Já Fachin (2001) *apud* Ramos (2009) demonstra que a pesquisa bibliográfica tem como principal objetivo conduzir o leitor a determinado assunto, utilizando as informações coletadas para desempenho da pesquisa, sendo imprescindível para qualquer pesquisa científica.

## 4.2 Tecnologias

Nesse tópico serão apresentadas as tecnologias utilizadas no desenvolvimento do trabalho. São elas a Linguagem de programação C++, a biblioteca de Visão Computacional OpenCV, o gerenciador de compilação Cmake e a ferramenta para elaboração e representação de pontos e gráficos no espaço conhecida como GeoGebra, que serão detalhadas a seguir.

### 4.2.1 Linguagem de Programação C++

O C++ segundo Walter (2018), é uma linguagem de programação de alto nível assim como à maioria das linguagens de programação como *C*, *C#*, *Java*, *Python* e outras. O autor aponta que as linguagens de programação de alto nível são semelhantes às linguagens humanas de muitas maneiras, pois são projetadas para serem de fácil leitura, facilitando assim a escrita de programas. Complementa que uma linguagem de programação de alto nível como o C++, contém instruções que são muito mais complexas do que as instruções simples que um processador de computador é capaz de seguir. Outro ponto citado é a necessidade da utilização de um programa que traduza a linguagem de alto nível como C++ para uma linguagem de máquina, esse programa é chamado de compilador. Pela necessidade da utilização de um compilador, a linguagem de programação C++ é chamada de linguagem compilada.

### 4.2.2 OpenCv

O *OpenCV* (*Open Source Computer Vision Library*) é uma biblioteca de programação livre tanto para uso acadêmico quanto comercial, desenvolvida pela *Intel Corporation* nos anos 2000, implementando uma vasta gama de ferramentas de interpretação de imagens através de módulos de processamento de estruturas de dados e álgebra linear, contando com mais de 2500 algoritmos de manipulação de imagens e vídeos (OPENCV, 2020). Segundo Bradski e Kaehler (2008), o *OpenCV* é compatível com os principais sistemas operacionais (*Windows*, *Linux* e *Mac OS*) possibilitando a utilização do processador de forma paralela, distribuindo o processamento da imagem em vários núcleos do processador, resultando em ganho de desempenho e tarefas simultâneas. Os autores complementam que os métodos da biblioteca estão divididas em cinco grupos:

- Processamento de imagens digitais;
- Análise Estrutural;
- Análise de movimentação e rastreamento de objetos;

- Reconhecimento de padrões;
- Calibração da câmera para reconstrução de cenas em 3D.

#### 4.2.3 Cmake

O *Cmake* segundo Martin e Hoffman (2015), é um gerenciador de compilação de código aberto para projetos de *software*, que permite aos desenvolvedores especificar quais são os parâmetros de compilação, através de um arquivo de texto simples. Este arquivo então é utilizado pelo *Cmake* para gerar arquivos de projeto para ferramentas de construção nativas, podendo ser utilizado em *Windows*, *Linux* e *Mac OS*, lidando com os aspectos difíceis da construção de *software*, como a compilação, permitindo assim a fácil personalização da construção por parte do usuário. Os autores apresentam a pesquisa automática de programas, bibliotecas e arquivos de cabeçalho como um ponto positivo da utilização do *Cmake*, já que muitos deles podem ser exigidos pelo *software* no momento de sua construção.

#### 4.2.4 GeoGebra

O GeoGebra segundo Nascimento (2012), é um *software* gratuito de matemática dinâmica que foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática. O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente, assim possibilitando sua utilização no ensino e aprendizagem de matemática abrangendo do ensino básico ao universitário. O autor aponta como vantagem a possibilidade de representar de maneiras distintas o mesmo objeto que pode conter interatividade. Complementa que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para criar ilustrações profissionais para serem utilizadas em apresentações e documentos de texto.

## 5 DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A presente seção será desenvolvida em três tópicos, nos dois primeiros tópicos, tem como objetivo relacionar os conteúdos da álgebra linear com as transformações geométricas num caráter matemático, através da utilização do *GeoGebra*, e também com caráter programacional utilizando os exemplos da biblioteca *OpenCV*. No terceiro tópico é apresentada uma análise dos resultados.





### 5.1 Aplicação da Álgebra Linear em Transformações Geométricas utilizando GeoGebra

Para a aplicação e exemplificação dos conceitos abordados ao decorrer do trabalho, torna-se importante algumas abstrações. Para a aplicação das transformações geométricas utilizando o *GeoGebra*, não foi utilizada uma imagem ou fotografia, e sim um polígono formado por quatro pontos no espaço. Segundo Von Wangenheim (2020), um polígono é formado por uma lista de retas ou segmentos, as quais são formadas por pares de pontos, que são formados por coordenadas  $x$  e  $y$  no espaço. Para esta exemplificação o sistema de coordenadas possui seu ponto de origem nas coordenadas  $x = 0$  e  $y = 0$ , e sua orientação se encontra no canto inferior esquerdo do dispositivo.

Na Figura 36, é possível visualizar os quatro pontos iniciais que serão utilizados ao decorrer de todas as exemplificações. Já na Figura 37a é possível visualizar a estrutura de formação do polígono, junto as definições de retas que o formam. Por último temos a Figura 37b que se refere ao desenho do polígono nos sistemas de coordenadas de duas dimensões (2D).

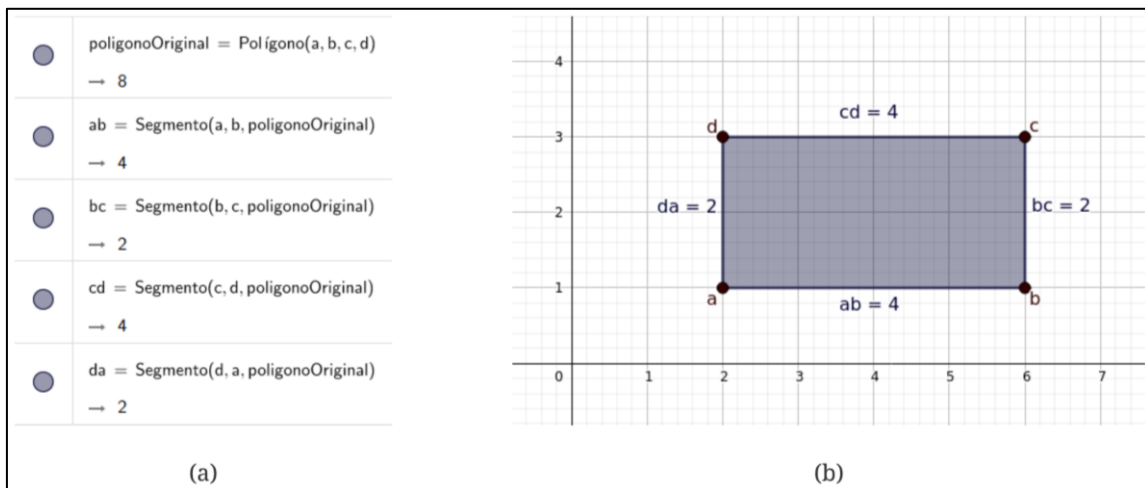
O polígono retangular apresentado na Figura 37b, possui uma resolução 2x4 unidades, apresentando uma área total de 8 unidades no sistema de coordenadas. Este polígono tem como objetivo representar a abstração de uma imagem a qual sofreria o processo de transformação geométrica.

Figura 36 - Pontos iniciais

	$a = (2, 1)$
	$b = (6, 1)$
	$c = (6, 3)$
	$d = (2, 3)$

Fonte: Do autor (2020).

Figura 37 - Polígono e suas representações

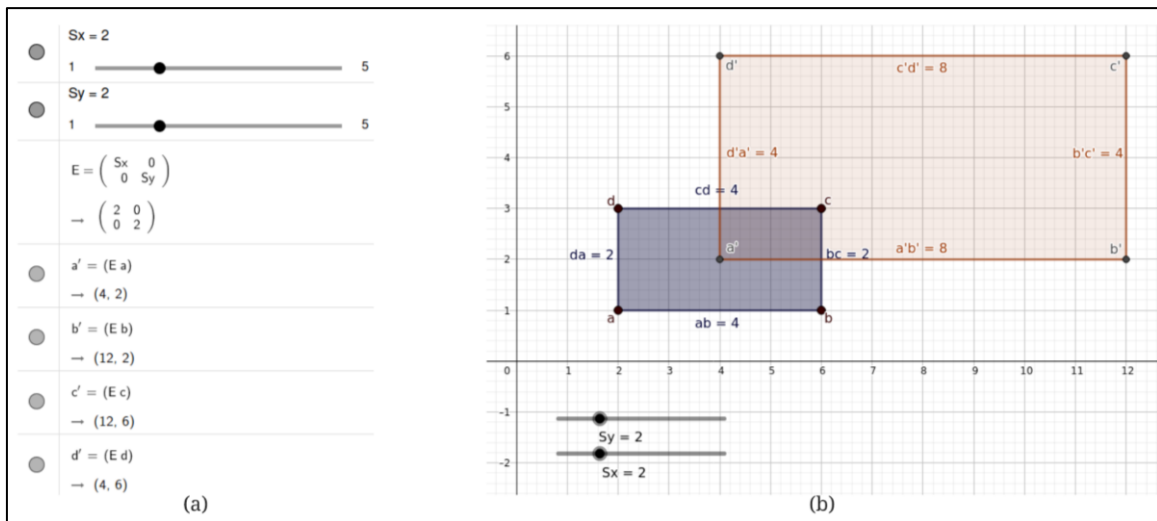


Fonte: Do autor (2020).

### 5.1.1 Aplicação da transformação de escala

Para aplicar a transformação de escala no polígono apresentado anteriormente, foi realizada a multiplicação de todos os pontos presentes pela matriz de transformação apresentada no tópico 2.3.2.1 Transformação de escala. Na Figura 38a, temos a apresentação dos fatores de escala  $S_x$  para o eixo  $x$  e  $S_y$  para o eixo  $y$ , também temos a matriz de transformação  $E$  a qual todos os pontos foram multiplicados, a fim de resultar nos pontos transformados. Já na Figura 38b, temos a representação de dois polígonos, o primeiro formado pelos pontos  $a, b, c$  e  $d$ , pontos originais, e pelos pontos  $a', b', c'$  e  $d'$ , pontos transformados.

Figura 38 - Transformação de escala e representação gráfica

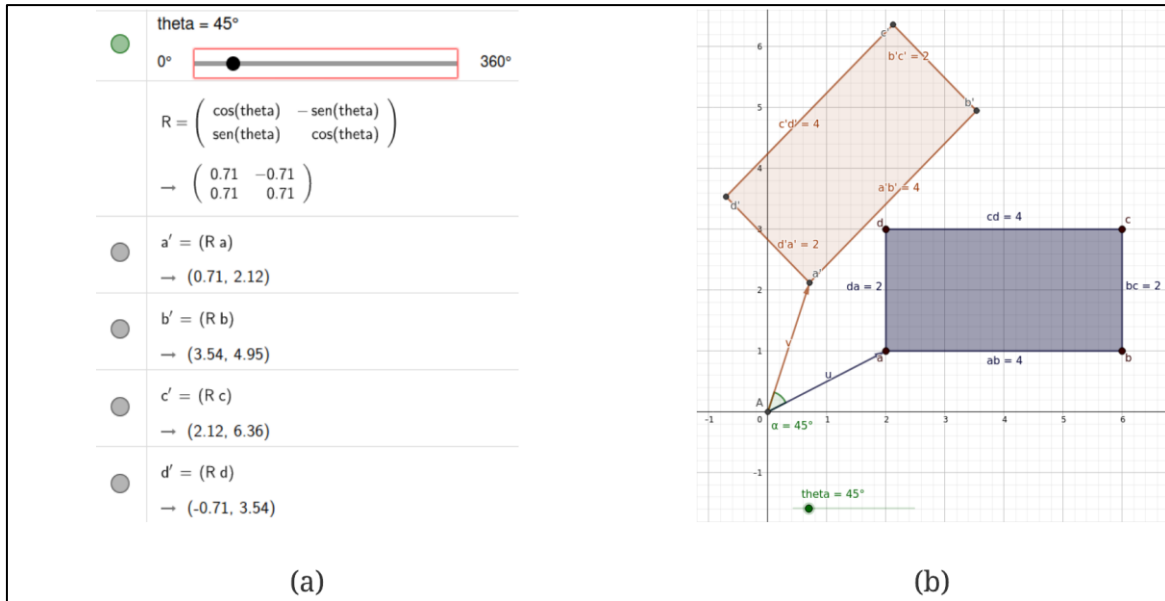


Fonte: Do autor (2020).

### 5.1.2 Aplicação da transformação de rotação

Para a transformação de rotação foram multiplicados todos os pontos que formam o polígono, pela matriz de transformação apresentada no tópico 2.3.2.2 Transformação de rotação. Na Figura 39a, temos o ângulo  $\theta$  o qual representa a quantidade de rotação que deve ser aplicada ao polígono, também temos a matriz de rotação  $R$  e os pontos que sofreram a transformação ( $a', b', c'$  e  $d'$ ). Na Figura 39b, temos a representação gráfica de dois polígonos sendo o primeiro o polígono inicial, e o segundo o polígono que representa o objeto rotacionado em relação a origem do plano. Também é possível visualizar dois vetores  $u$  e  $v$ , que representam o deslocamento do ponto  $a$  para um novo ponto  $a'$ , através da utilização da ferramenta de medição de ângulos disponíveis no *GeoGebra*, foi possível definir qual a angulação de rotação, comparando o vetor de origem com o vetor transformado, resultando em um ângulo de rotação de  $45^\circ$ .

Figura 39 - Transformação de rotação e representação gráfica

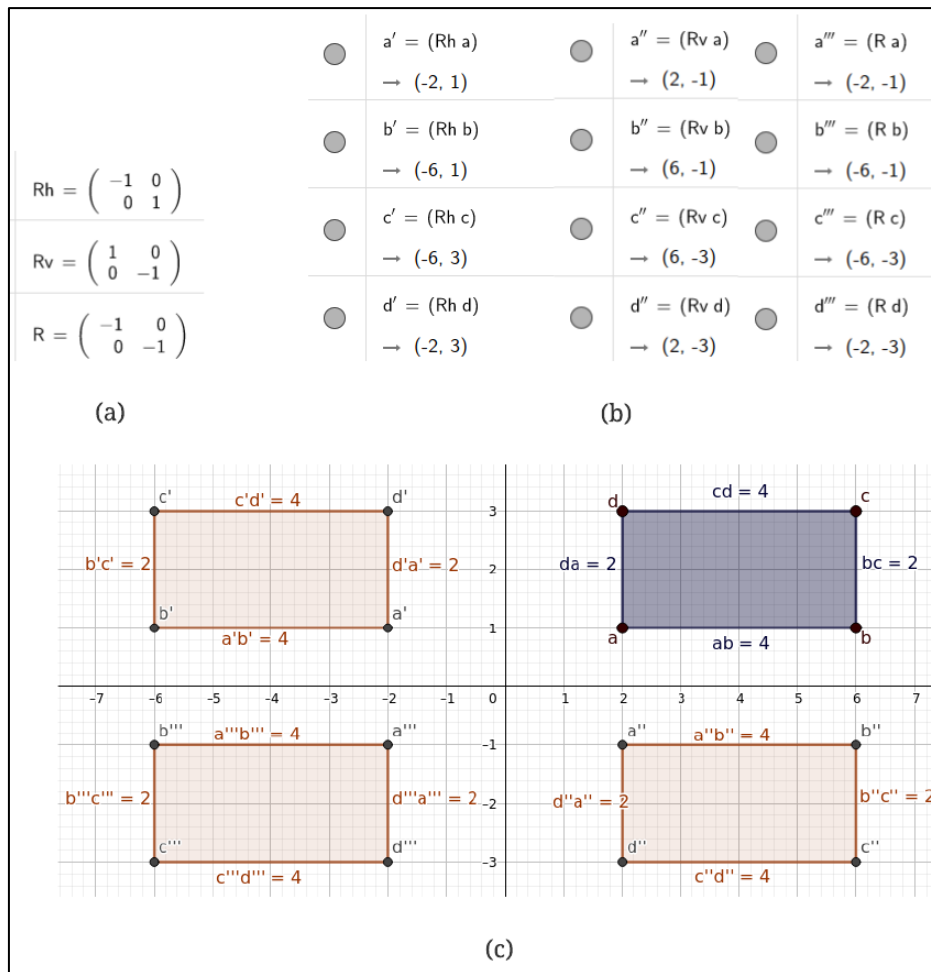


Fonte: Do autor (2020).

### 5.1.3 Aplicação da transformação de reflexão

Na exemplificação referente a aplicação da reflexão, foi multiplicado todos os pontos do polígono por três matrizes de transformação (FIGURA 40a), resultando em três polígonos distintos (FIGURA 40c), as diferenças das matrizes foram abordadas anteriormente no tópico 2.3.2.3 Transformação de reflexão. Na Figura 40b, temos os resultados das transformações em relação a multiplicação dos pares ordenados dos pontos, pelas matrizes de transformação.

Figura 40 - Transformação de reflexão e representação gráfica



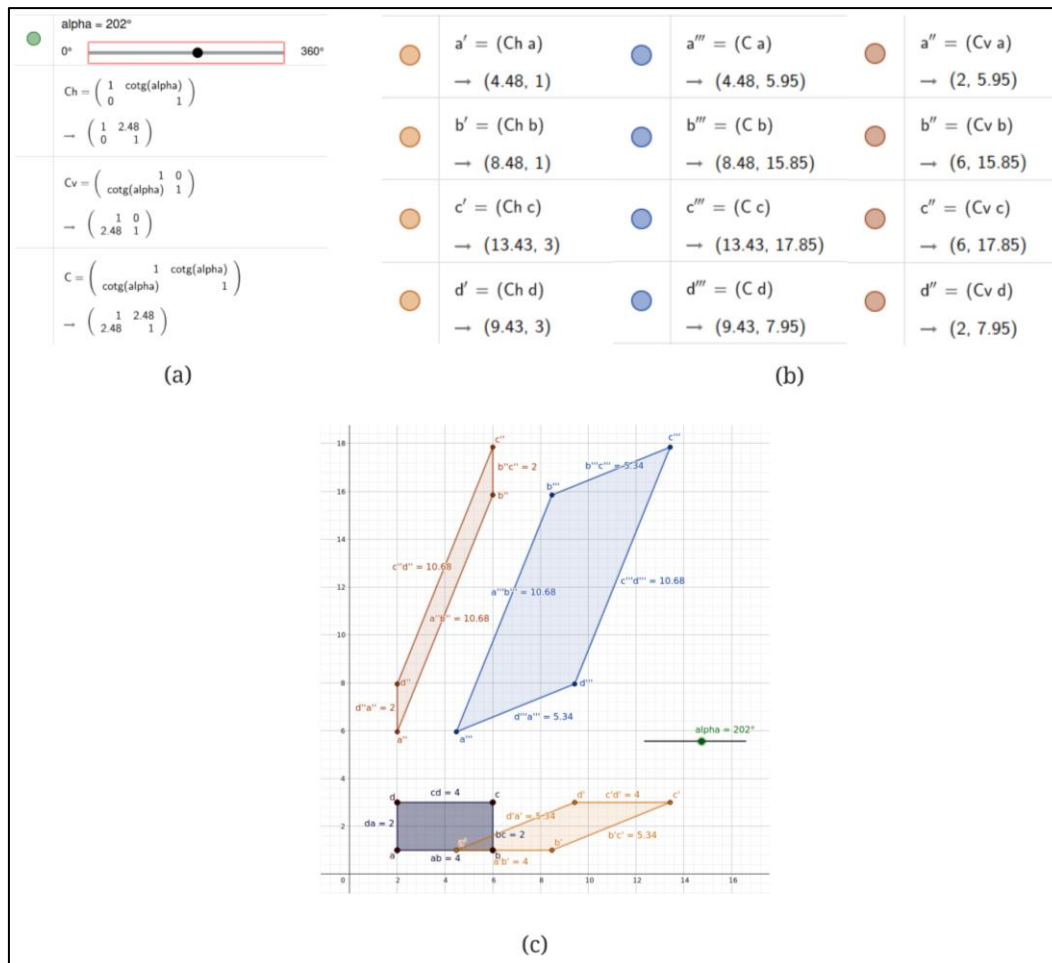
Fonte: Do autor (2020).

#### 5.1.4 Aplicação da transformação de cisalhamento

A transformação de cisalhamento possui três matrizes de transformação, do mesmo modo que a transformação de reflexão. Para aplicarmos a transformação de cisalhamento basta multiplicar todos os pontos do polígono pela matriz de transformação desejada. No tópico 2.3.2.4 Transformação de cisalhamento, foi demonstrada a diferenciação entre as matrizes. Para esta exemplificação foi realizado o processo da multiplicação dos pontos do polígono original, por cada uma das matrizes de transformação (FIGURA 41a; FIGURA 41b), resultando em três novos polígonos(FIGURA 41c).



Figura 41 - Transformação de cisalhamento e representação gráfica

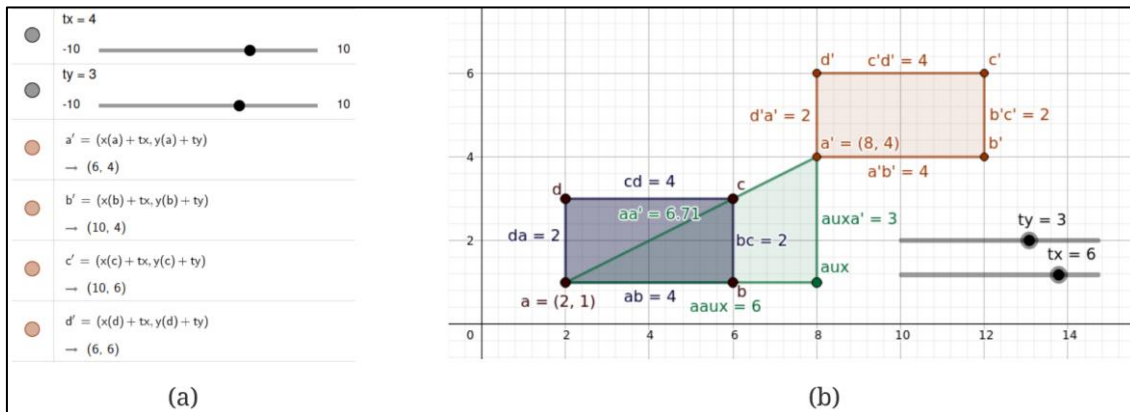


Fonte: Do autor (2020).

### 5.1.5 Aplicação da transformação de Translação

A transformação de translação é a única transformação deste trabalho que não é realizada pelo processo de multiplicação dos pontos do polígono por uma matriz de transformação, exemplificado no tópico 2.3.2.5 Transformação de translação. Sendo assim, é escolhido o quanto o ponto do polígono deve se mover em relação a cada eixo do sistema de coordenadas, somando esses valores ao par ordenado, resultando em um novo valor para a coordenada do ponto (FIGURA 42a). Na Figura 42.b é demonstrado o polígono original junto ao novo polígono que representa a transformação dos pontos pelo acréscimo ou decréscimo de um valor ao eixo  $x$  e  $y$  do ponto.

Figura 42 - Transformação de translação e representação gráfica

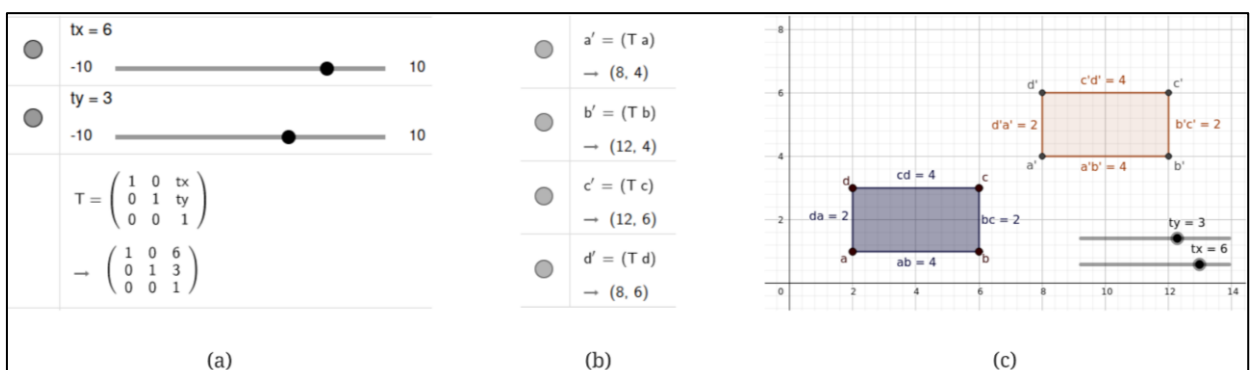


Fonte: Do autor (2020).

### 5.1.5 Aplicação de transformações utilizando coordenadas homogêneas

Para exemplificar o processo da utilização de coordenadas homogêneas, foi escolhida a transformação de translação. Com a utilização de coordenadas homogêneas torna-se possível aplicar a transformação de translação através da multiplicação de matrizes (FIGURA 43b) como já exemplificado no tópico 2.3.3 Coordenadas Homogêneas. Na Figura 43a temos a representação do fator de translação em cada eixo do ponto, junto a matriz de transformação. Já na Figura 43c, temos a representação do polígono original junto a representação do polígono transladado.

Figura 43 - Transformação de translação com multiplicação de matriz e representação gráfica



Fonte: Do autor (2020).

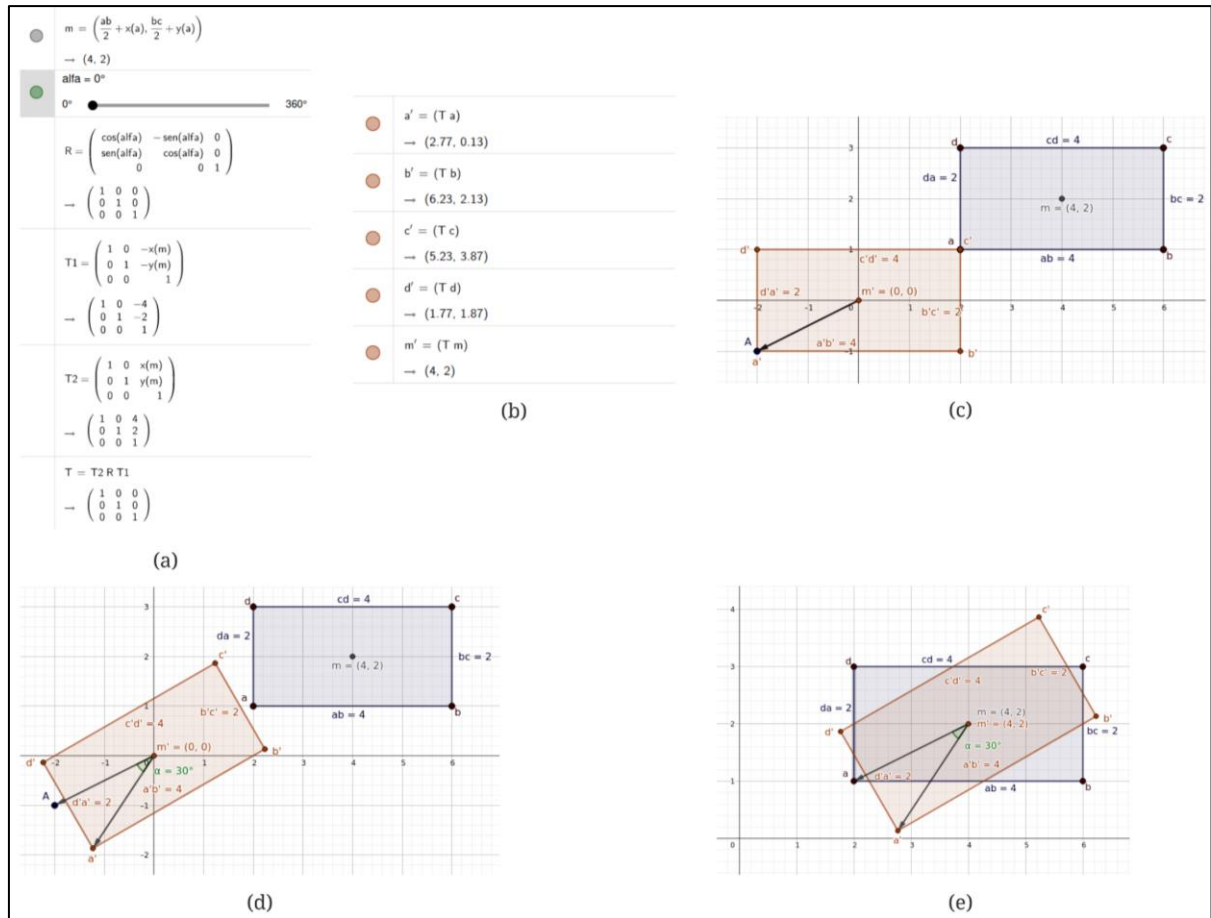
### 5.1.6 Aplicação de transformações sucessivas

Analisando as transformações que já foram exemplificadas até o presente momento, observamos que todas foram realizadas em relação a origem do sistema de coordenada, apresentando sempre uma transformação de translação junto a transformação desejada. Com a utilização das coordenadas homogêneas, viabilizou-se a multiplicação de várias matrizes de transformação, a fim de gerar uma única transformação, como a transformação em um ponto específico que será demonstrada neste tópico. Na transformação em um ponto específico a rotação é dada em torno do ponto central do polígono. Na Figura 44a, temos algumas definições que são:

- $m$ : Ponto médio do polígono;
- $\alpha$ : Ângulo o qual o polígono vai ser rotacionado;
- $R$ : Matriz de rotação para rotacionar o polígono no centro de origem do plano;
- $T1$ : Matriz de translação para transladar o polígono ao centro do plano;
- $T2$ : Matriz de translação que retornará o polígono a sua coordenada de origem;
- $T$ : Matriz resultante que aplica as transformações das demais matrizes.

Na Figura (44b), temos a aplicação da matriz resultante que ao ser multiplicada a todos os pontos, gera o resultado da rotação em um ponto específico (FIGURA 44e). Caso a multiplicação dos pontos fosse realizada por cada uma das matrizes de transformação de maneira individual, seria possível visualizar cada etapa do processo (FIGURA 44c; FIGURA 44d; FIGURA 44e), invés de obter diretamente o resultado desejado.

Figura 44 - Transformação de rotação em um ponto específico e representação gráfica



Fonte: Do autor (2020).

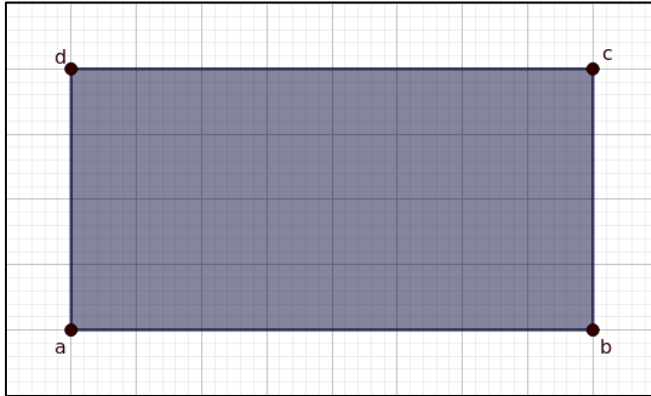
## 5.2 Aplicação da Álgebra Linear em Transformações Geométricas utilizando OpenCV

Para a aplicação dos conceitos abordados na referencição desta pesquisa, foi escolhida a biblioteca de Visão Computacional *OpenCV* junto a obra de García (2015), intitulada “Aprendendo processamento de imagem com *OpenCV*” em tradução livre. Os conceitos das transformações geométricas relacionadas a biblioteca *OpenCV* já foram abordados no tópico 2.8 Transformações Geométricas na Visão Computacional.

Na exemplificação foi utilizada a imagem da Figura 45, que representa o polígono utilizado nas transformações através da plataforma *GeoGebra*, nesta imagem também temos os pontos que formam o polígono, para facilitar a visualização de transformações que modificam a localização dos pontos da imagem. Na demonstração das transformações utilizando o *GeoGebra* lidamos com noções de pontos, retas e polígonos, agora nas transformações com *OpenCV*, mantemos as noções matemáticas, mas invés de aplicarmos a multiplicação das

coordenados dos pontos pela matriz de transformação, passamos a lidar com a multiplicação das coordenadas dos *pixels* pelas matrizes de transformação.

Figura 45 - Imagem utilizada nas transformações

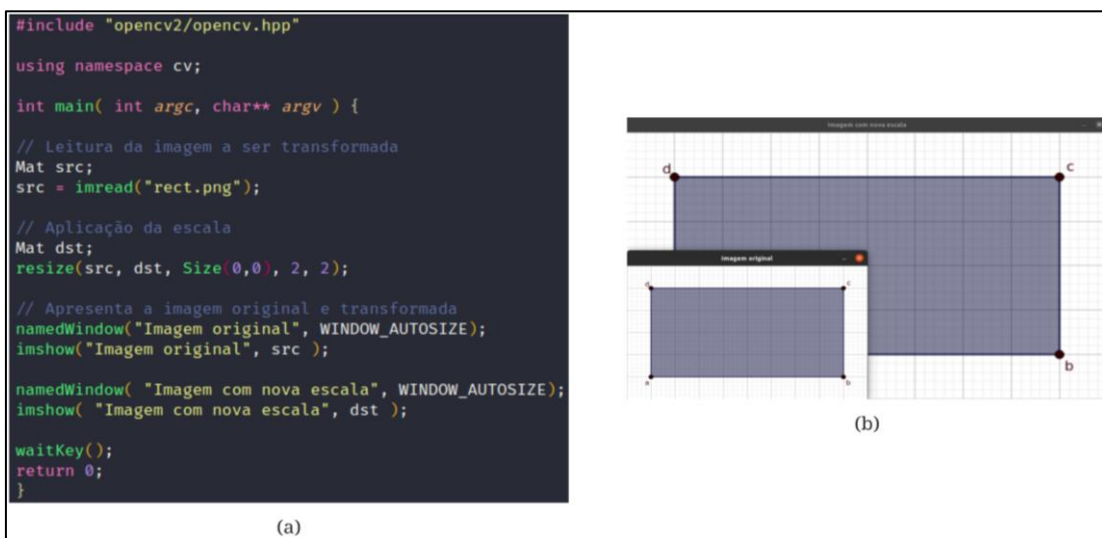


Fonte: Do autor (2020).

### 5.2.1 Aplicação da transformação de escala

Na Figura 46a, apresenta o código referente a transformação de escala, neste código temos a entrada da imagem (FIGURA 45), e o processamento da mesma pela função *resize* que realiza a transformação. Nesta função é informado a matriz de origem da imagem, a matriz de destino que receberá os *pixels* transformados, a proporção da imagem apresentada por *Size (0,0)* com o objetivo de manter a proporção, e por último os fatores de escala a serem aplicados ao eixo *x* e *y*.

Figura 46 - Código da transformação de escala e representação da imagem de saída



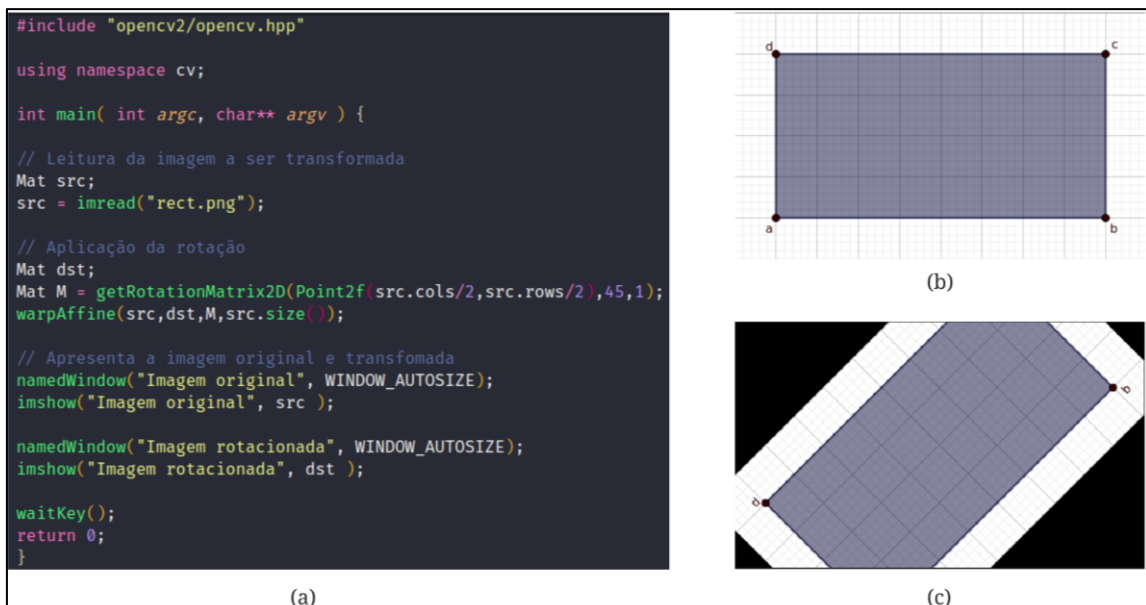
Fonte: García; *et al.* (2015, p.76), editada pelo autor (2020).

### 5.2.2 Aplicação da transformação de rotação

Na aplicação de transformação de rotação, a biblioteca *OpenCV* faz uso da matriz de transformação apresentada no tópico 2.8.3 Transformação de rotação, sendo esta, uma matriz resultante de várias transformações geométricas. Com esta matriz torna-se possível realizar o processo de transformação de rotação, escala ou ambas as transformações, para uma melhor exemplificação foi realizado o teste de aplicabilidade desta matriz na plataforma *GeoGebra* (FIGURA 48). Para o teste em questão foi apenas atribuído o conceito de coordenadas homogêneas para viabilizar a multiplicação dos pontos pela matriz.

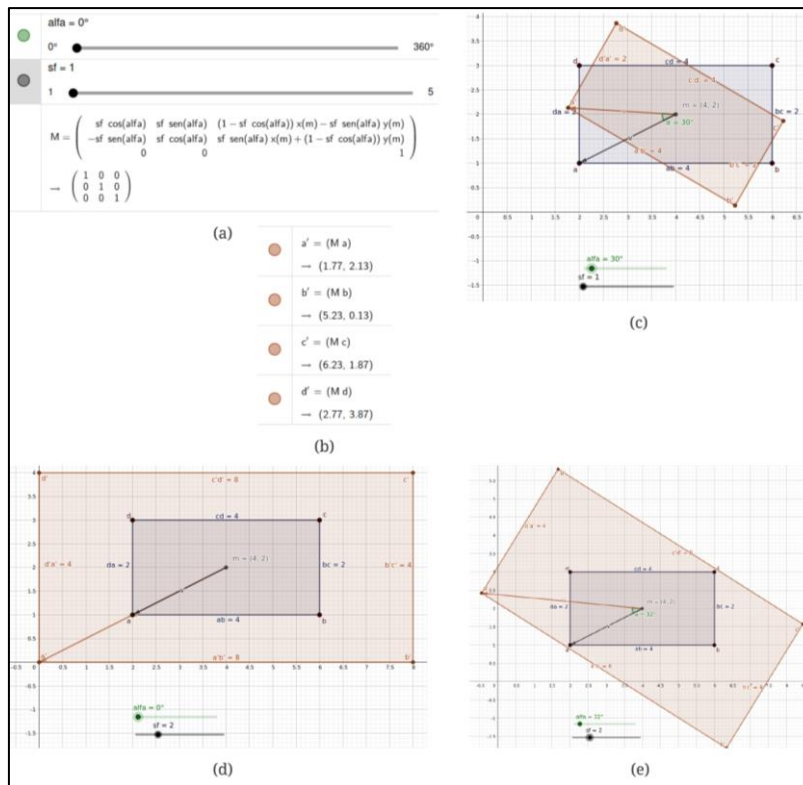
Para aplicação desta transformação com a biblioteca *OpenCv* (FIGURA 47a), torna-se necessária a criação da matriz de rotação que atenda os parâmetros desejados, informando qual o ponto de rotação, no caso da exemplificação é o ponto médio da imagem, o quanto a imagem deve ser rotacionada, no caso em questão  $45^\circ$ , e por último o fator de escala, que na situação é representado por um fator  $1$ , para manter as propriedades iniciais da imagem. Após a definição desta matriz a mesma é aplicada a cada pixel através da função *warpAffine*. Na Figura 47b temos a imagem de entrada e na Figura 47c, a imagem após sofrer o processo da transformação por rotação.

Figura 47 - Código da transformação de rotação e representação da imagem de saída



Fonte: García *et al.* (2015, p. 80), editada pelo autor (2020).

Figura 48 - Aplicação da matriz de rotação OpenCV no GeoGebra



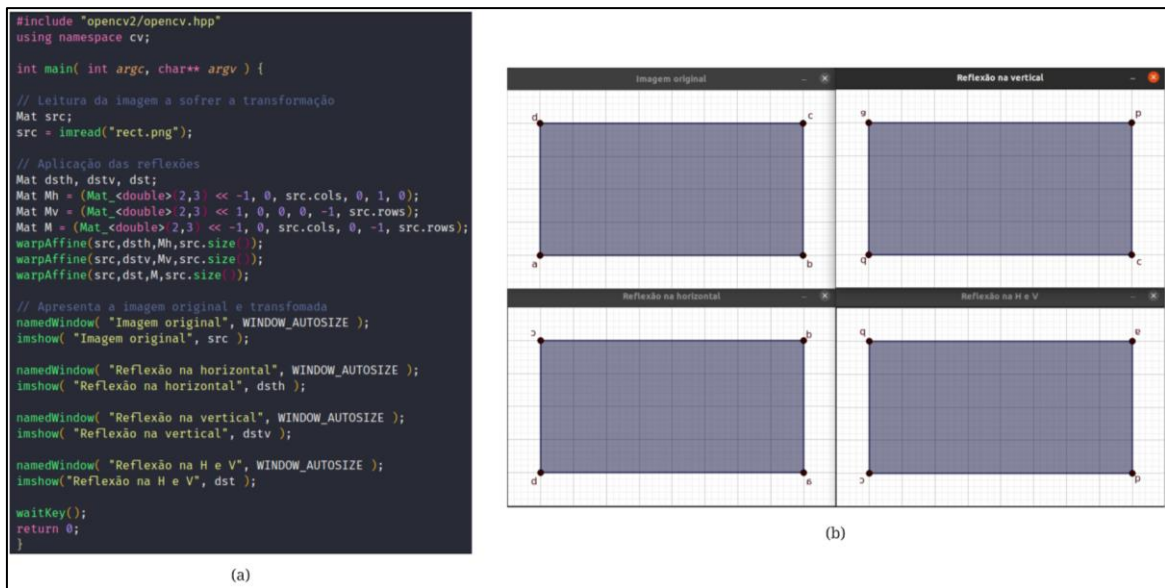
Fonte: Do autor (2020).

### 5.2.3 Aplicação da transformação de reflexão

A transformação de reflexão possui três matrizes de transformação exemplificadas no tópico 2.8.5 Transformação de reflexão. Na Figura 49a, temos o código que realiza a aplicação da transformação sobre a imagem de entrada, para isso são criadas três matrizes de transformação que são aplicadas aos *pixels* pela função *warpAffine*, resultando em quatro imagens de saída, sendo uma delas a original e as demais as imagens transformadas em relação ao eixo x, eixo y e ambos os eixos (FIGURA 49b).



Figura 49 - Código da transformação de reflexão e representação da imagem de saída

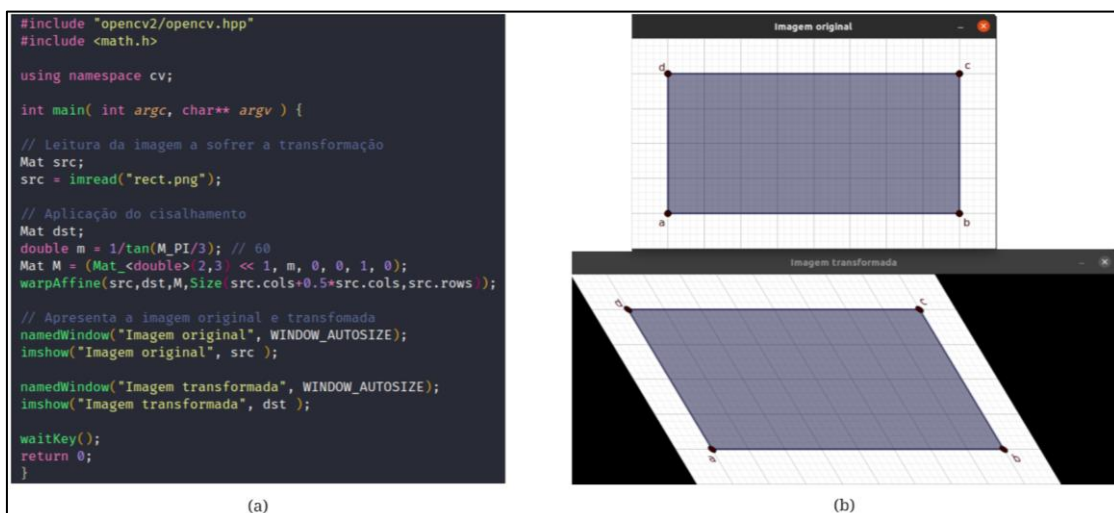


Fonte: García *et al.* (2015, p. 84), editada pelo autor (2020).

## 5.2.4 Aplicação da transformação de cisalhamento

Na aplicação de cisalhamento também temos matrizes de transformação, detalhadas no tópico 2.8.4 Transformação de cisalhamento. Para esta exemplificação foi utilizada a matriz de transformação de cisalhamento em relação ao eixo  $x$ , fazendo uso da cotangente do ângulo. Na imagem 50a, temos o código que faz uso da matriz de transformação aplicada a cada um dos *pixels* da imagem, resultando na imagem transformada (FIGURA 50b).

Figura 50 - Código da transformação de cisalhamento e representação da imagem de saída



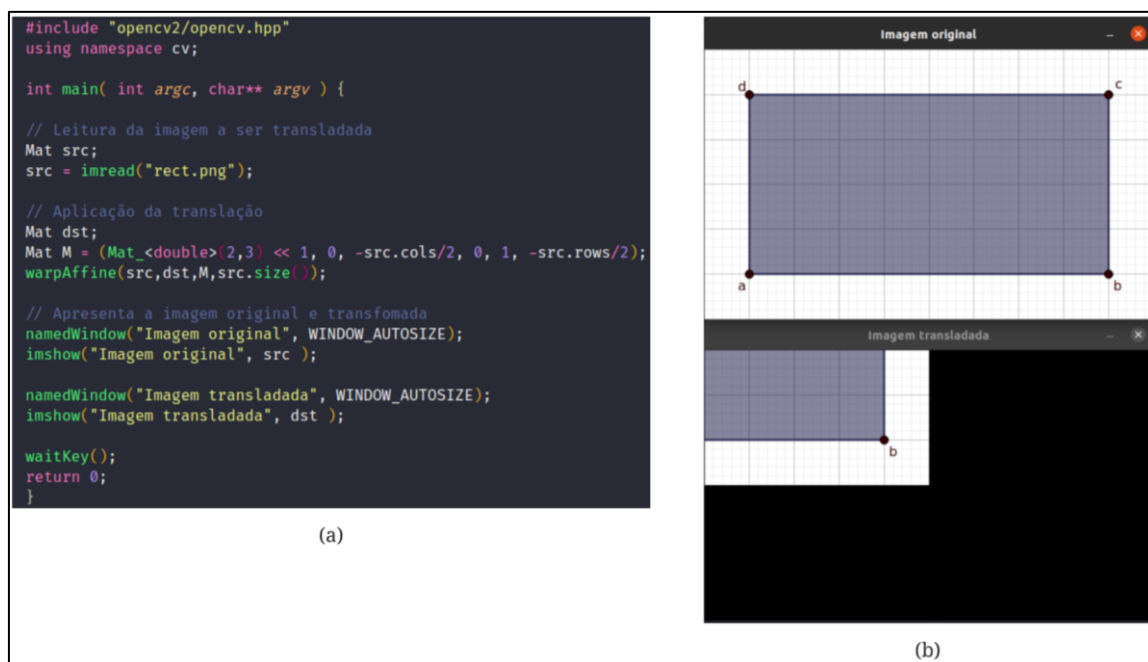
Fonte: García *et al.* (2015, p. 82), editada pelo autor (2020).



### 5.2.5 Aplicação da transformação de translação

Para a transformação de translação foram utilizados os conceitos apresentados no tópico 2.8.2 Transformação de translação. Neste exemplo foi realizada a translação do ponto médio da imagem para a origem do sistema de coordenadas (FIGURA 51b). Para isso precisamos entender que existe uma diferença entre a origem do sistema de coordenadas utilizada na exemplificação com a plataforma *GeoGebra* e a exemplificação com a biblioteca *OpenCV*. No *GeoGebra* a origem do sistema de coordenadas encontra-se na posição  $x = 0$  e  $y = 0$  localizando-se no canto inferior direito da tela do dispositivo, e na biblioteca *OpenCV* na mesma posição  $x$  e  $y$  mas com sua localização no canto superior direito, apresentando o eixo  $y$  de forma espelhada. Na Figura 51a, temos o código que faz uso da matriz de transformação de translação aplicada a função *warpAffine*.

Figura 51 - Código da transformação de translação e representação da imagem de saída



Fonte: García *et al.* (2015, p. 78), editada pelo autor (2020).

### 5.3 Análise dos resultados

Nos tópicos anteriores foram demonstradas as aplicações dos conceitos apresentados no referencial teórico da presente pesquisa. Com esta demonstração, torna-se possível a visualização entre a relação dos conteúdos apresentados e suas aplicações, tanto ao *GeoGebra* quanto ao *OpenCV*. Na aplicação do *GeoGebra* foi demonstrada a utilização da Álgebra Linear em Transformações Geométricas, sobre um polígono, multiplicando os pontos de um sistema

de coordenadas às matrizes de transformações, resultando no polígono transformado. Aplicando as Transformações Geométricas junto a biblioteca de Visão Computacional OpenCV, tornou-se possível a visualização dos mesmos conceitos encontrados na exemplificação relacionada a aplicação das Transformações Geométricas utilizando o GeoGebra, comprovando a correlação entre elas, através dos resultados obtidos com as transformações.

## 6 CONCLUSÕES

Com o objetivo de realizar uma pesquisa bibliográfica e exploratória que demonstra a correlação dos conteúdos da Álgebra Linear presente nas Transformações Geométricas utilizadas na Visão Computacional, foi possível validar tanto a questão de pesquisa quanto à hipótese em questão.

Na questão da pesquisa foram constatados conteúdos como noções de localização no espaço em duas dimensões (2D), utilização de vetores, pontos, matrizes e operações entre vetores e matrizes. Sobre a importância da utilização da Álgebra Linear na Visão Computacional, foi possível constatar a utilização de sistemas lineares, e as inúmeras possibilidades através da multiplicação de matrizes por pontos ou vetores.

Para validação da hipótese e dos conteúdos apresentados no referencial teórico, foi realizado uma relação entre os conteúdos da Álgebra Linear e as Transformações Geométricas presentes na Visão Computacional, através da aplicação dos conceitos a plataforma *Geogebra* com um viés matemático, e aplicação dos mesmos conceitos em código utilizando a biblioteca *OpenCV*. Sendo assim possível demonstrar a maneira sobre a qual as transformações Geométricas são aplicadas às imagens, gerando um maior entendimento sobre as funções apresentadas na biblioteca *OpenCV*. Segundo Von Wangenheim (2020), a utilização da Álgebra Linear possibilita a execução de múltiplas transformações geométricas sobre imagens, através da multiplicação, possibilitando a execução destas tarefas de forma paralela com o auxílio de uma unidade de processamento gráfico (*GPU*) que atribui um maior desempenho as transformações.

Com base nas constatações anteriores concluo que a Álgebra Linear, está mais presente na computação do que podemos imaginar, ultrapassando sua utilização na Visão Computacional, a fim de possibilitar tanto a compreensão como a resolução de problemas matemáticos simples e complexos em diversas áreas voltadas à computação.

## 6.1 Trabalhos futuros

Com base na pesquisa realizada na etapa de conclusão de curso, foi possível constatar que a utilização da Álgebra Linear ultrapassa os conhecimentos e aplicações relacionados às Transformações Geométricas. Tornando essa pesquisa um ponto de partida sobre utilização da Álgebra Linear na Visão Computacional.

Considerando os resultados obtidos na presente pesquisa, torna-se possível a sua continuidade, relacionando pesquisa a conteúdos mais complexos da Álgebra Linear em relação à Visão Computacional, através da aplicação dos conceitos em filtros, transformações de perspectivas, correção de cores ou até mesmo na identificação de objetos e padrões em imagens.

## REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C . **Álgebra linear contemporânea**. 1. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2006. 612 p. ISBN 9788536306155

AZEVEDO, Eduardo. **Computação gráfica, teoria e prática: Geração de imagens**. 2. ed. São Paulo: Grupo GEN, 2018. v. 1, 360 p. ISBN 9788535287790

AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura; VASCONCELOS, Cristina Nader. **Computação gráfica : teoria e prática, geração de imagens**. 2. ed. Rio de Janeiro : Elsevier, 2018. ISBN 9788535287790

BALDINO, Roberto Ribeiro; SILVA, Rute Henrique da. Introdução ao processamento de imagens ou aplicação da álgebra linear. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 19, p. 123 -144, 2001.

BOYER, Carl .B . **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1988. 496 p. ISBN 9788521200239

BRADSKI, Gary; KAEHLER, Adrian. **Learning OpenCV**. 1. ed. Sebastopol: O'Reilly Media, Inc, 2008. 571 p. ISBN 9780596516130

BURGER, Wilhelm; BURGE, Mark .J . **Digital image processing: an algorithmic introduction using Java**. 2. ed. Belin: Springer, 2016. 811 p. ISBN 9781447166832

CAMPOS, Rafael M.; BARBOZA, Thaislane F.; LAZARO, Marcos A.; RAFALSKI, Jadson .P . Utilização de visão computacional para detecção de posicionamento e desvios de veículos autônomos em faixas de rolagem. **Revista Espaço Transdisciplinar**, Salvador, [S.l.], v. 2, n. 01, p. 23-33, abr. 2019. ISSN 2526-6470.

CRILLY, Tony. **50 ideias de matemática que você precisa conhecer**. Tradução Helena Londres, 1. ed. São Paulo: Planeta Brasil, 2017. 216 p. ISBN 8542208862

DAWSON-HOWE, Kenneth. A practical introduction to Computer Vision with Opencv. John 1. ed. Hoboken: Wiley & Sons, 2014. 223 p. ISBN 9781118848456

DEMAAGD, Kurt; OLIVER, Anthony; OOSTENDORP, Nathan; SCOTT, Katherine. **Practical Computer Vision with SimpleCV: the simple way to make technology see**. 1. ed. Newton:O'Reilly Media, 2012. 254 p. ISBN 9781449320362

ESPINOSA, Isabel Cristina Oliveira Navarro; OLIVA, Laura Maria da Cunha Canto;

BARBIERI FILHO, Plinio. **Álgebra Linear para computação**. 1 ed. São Paulo: LTC, 2007. 304 p. ISBN 9788521615521

ETGETON, Klaus Fernando. **Prototipação de uma solução para controle de dispositivos em casas inteligentes por meio do reconhecimento de gestos estáticos e biometria facial**. 2019. Monografia (Graduação em Engenharia de Software) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 02 dez. 2019. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/2721>. Acesso em: 10 nov. 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2002. 844 p.

FORSYTH, David A.; PONCE, Jean. **Computer vision: a modern approach**. New Jersey: Prentice Hall Professional Technical Reference, 2002. 720 p. ISBN 9780130851987

FRANCO, Neide Bertoldi. **Álgebra linear**. 1 ed. Belo Horizonte: Pearson Brasil, 2016. 374 p. ISBN 9788543019154

GALIMBERTI, Luiz Henrique de Oliveira. **"Estudo comparativo de algoritmos de biometria facial disponibilizados pela biblioteca OpenCV para controle de acesso"**. 2018. Monografia (Graduação em Engenharia da Computação) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 06 dez. 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/2328>.

GARCÍA, Gloria Bueno; SUAREZ, Oscar Deniz; ARANDA, José Luis Espinosa; TERCERO, Jesus Salido; GRACIA, Ismael Serrano; ENANO, Noelia Váñez. **Learning image processing with opencv**. Birmingham: Packt Publishing Ltd, 2015. 232 p. ISBN 9781783287666

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. ISBN 9788538600718

GIL, Antonio Carlos. **Estudo de caso**. 1 ed. São Paulo: Atlas, 2009. 148 p. ISBN 978-85-22455324

HUANG, Thomas. **Computer vision: Evolution and promise**. 19th CERN School of Computing, The Netherlands, p. 21 -25, set., 1996.

LAY, David C. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2. ed. São Paulo: LTC, 2007. 504 p. ISBN: 8521611560

LIESEN, Jörg; MEHRMANN, Volker. **Linear Algebra**. Springer, 2015. 312 p. ISBN 9783319243443

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. 259 f. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MARTIN, Ken; HOFFMAN, Bill. **Mastering CMake: a cross-platform build system**:

**version 3.1. 4.** ed. Nova Iorque: Kitware, 2015. 385 p. ISBN 9781930934207

MATIAS-PEREIRA, José. **Manual de Metodologia da Pesquisa Científica**, 4. ed. São Paulo: Atlas, 2016. 226 p. ISBN 9788597008777

MIRANDA, Daniel; GRISI, Rafael; LODOVICI, Sinuê. **Geometria analítica e vetorial**. Santo André–SP: Universidade Federal do ABC, 2015. 223 p.

MORESI, Eduardo. **Metodologia da pesquisa**. Monografia (Especialização)-Universidade Católica de Brasília, DF, 2003. 108 p.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria**: reflexão da prática na escola. *In*: XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifo. GeoGebra Uruguai, p. 133 - 140, 2012. ISSN 23010185

OPENCV. **Site Oficial**, 2020. Disponível <<https://opencv.org/>>. Acesso em: 05 mai. 2020.

OSONE, Mariana. **A linguagem das MÁQUINAS**. Revista Cálculo Matemática para todos, São Paulo, a 4, n. 45, p. 18-21, out. 2014. ISSN 2179-1384.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**: Volume 3. 3. ed. Porto Alegre: Moderna, 2013. 496 p. ISBN 9788516063689

POSSANI, Cláudio. **MAT3457 : Álgebra linear 1**, aula 1. Gravada na Escola Politécnica da USP, 25 fev. 2019. Vídeo (1h 14 min 25 s). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=-JcQJFNVjaA&t=160s>>. Acesso em: 7 nov. 2020.

RAMOS, Albenides. **Metodologia da pesquisa científica: como uma monografia pode abrir o horizonte do conhecimento**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2009. 246 p. ISBN 9788522454259

ROSA, Odileia da S.; CASANOVA, Leonardo C.; LEHMANN, Monique S.; GOULART, Ivy .G . Explorando as transformações lineares no plano, através do software WINPLOT. **Revista Eletrônica TECCEN**, Vassouras, v. 2, n. 2, p. 10 -20, 2009. ISSN 19840993

SILVA, Rogério Eduardo; DANIEL E SILVA, David; SANTOS, Gilmário Barbosa. **Matemática na computação: uma crítica à visão dos alunos**. World Congress on Engineering and Technology Education, São Paulo, p. 862 - 866, 14 -17 mar., 2004.

SZELISKI, Richard. **Computer vision algorithms and applications**. Ithaca: Springer, 2011.

VON WANGENHEIM, Aldo. **INE 5420: Computação gráfica**. Aula 03 - Transformações básicas em 2D e coordenadas homogêneas. Departamento de Informática e Estatística INE/CTC/UFSC, 2020. Vídeo (51min 33s). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=HYRbRAc2eQI&t=164s>>. Acesso em: 7 nov. 2020.

WALTER, Savitch. **Problem Solving with C++ Plus Pearson Mylab Programming with Pearson Etext, Global Edition**. 10. ed. Nova Iorque: Pearson Education Limited, 2018. ISBN 9781292222820



**UNIVATES**

R. Avelino Tallini, 171 | Bairro Universitário | Lajeado | RS | Brasil  
CEP 95900.000 | Cx. Postal 155 | Fone: (51) 3714.7000  
[www.univates.br](http://www.univates.br) | 0800 7 07 08 09